

Die Konstruktion konformer Abbildungen mit der Methode der finiten Elemente

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der
philosophischen Doktorwürde
der
PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II
der
UNIVERSITÄT ZÜRICH

vorgelegt von
FRIDOLIN BOSSHARD
von Pfäffikon/ZH

Begutachtet von
Herrn Prof. Dr. H.R. Schwarz

ADAG Administration & Druck AG

Zürich 1980

Die Konstruktion konformer Abbildungen mit der Methode der finiten Elemente

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der
philosophischen Doktorwürde
der
PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II
der
UNIVERSITÄT ZÜRICH

vorgelegt von
FRIDOLIN BOSSHARD
von Pfäffikon/ZH

Begutachtet von
Herrn Prof. Dr. H.R. Schwarz

ADAG Administration & Druck AG

Zürich 1980



VORWORT

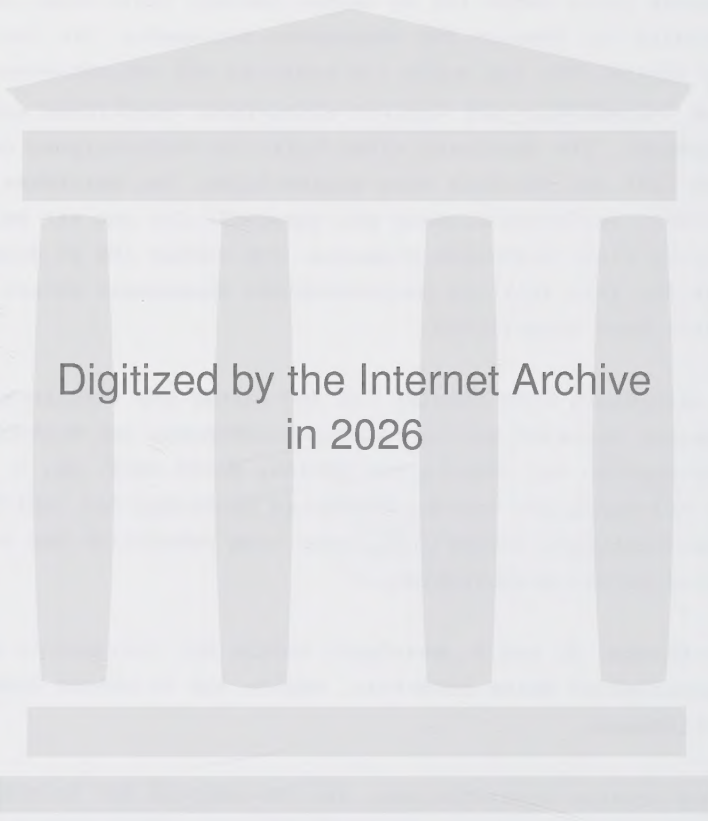
Bei der Abfassung der vorliegenden Dissertation durfte ich von verschiedenen Seiten wertvolle Hilfe erfahren.

In erster Linie denke ich an meinen Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. R. Schwarz vom Seminar für angewandte Mathematik der Universität Zürich. Von ihm wurde ich erstmals auf verschiedene Fragen im Zusammenhang mit diskret-holomorphen Funktionen aufmerksam gemacht. Die Benützung eines Teils des Manuskriptes seines Buches [18] war für mich eine grosse Hilfe. Das Entstehen meiner Arbeit verfolgte er stets mit Interesse und gab mir bei der Abfassung viele wertvolle Hinweise. Ich möchte ihm an dieser Stelle für sein zeitlich anspruchvolles Engagement meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Ganz besonderen Dank schulde ich dem Leiter des Institutes für Operations Research und mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Zürich, Herrn Prof. Dr. P. Kall. Seine Erlaubnis zur uneingeschränkten Benützung der vielfältigen Einrichtungen seines Institutes trug wesentlich bei zum Gelingen meiner Dissertation .

Meine Eltern, N. und P. Bosshard, welche die vorliegende Arbeit in grosszügiger Weise förderten, möchte ich in meinen Dank miteinschliessen.

Von der grossen Unterstützung, die ich während der letzten drei Jahre bei der Behandlung meines Themas von Seiten meiner Frau, Elisabeth Bosshard, erfahren durfte, ist die sorgfältige Herstellung der Figuren nur der sichtbare Teil. Ihr Glaube an das Gelingen meiner Doktorarbeit war für mich immer wieder eine Anspornung. Dafür möchte ich ihr an dieser Stelle nochmals ganz herzlich danken.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507202_0073

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG	S. 7
2	DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE; LINEARER ANSATZ IM DREIECK	S. 15
2.1	Bedingungsgleichung für einen inneren Punkt von R_1	S. 17
2.2	Bedingungsgleichung für einen Randpunkt von C_1	S. 19
3	DISKRETE HOLOMORPHIE IM FALL DES LINEAREN ANSATZES IM DREIECK	S. 20
3.1	Definition des Gitters	S. 20
3.2	ℓ -diskrete Holomorphie	S. 22
3.3	Spezial- und Sonderfälle	S. 29
4	DIE ERWEITERUNG VON R_1 IM FALL EINES PARALLELO - GRAMMANSATZES	S. 31
5	DIE KONSTRUKTION VON KONFORMEN ABBILDUNGEN MITTELS ℓ -DISKRET-HOLOMORPHEN FUNKTIONEN	S. 39
5.1	Grundlagen und Problemstellung	S. 39
5.2	Die Konstruktion der ℓ -diskret-holomorphen Funktion für die Abbildung auf ein Rechteck	S. 42
5.3	Praktische Probleme	S. 46
5.4	Ein Beispiel	S. 47
6	KONVERGENZBETRACHTUNG FÜR DEN LINEAREN FALL	S. 49
6.1	Voraussetzungen und Bezeichnungen	S. 49
6.2	Die Konvergenz von $u^{(n)}$ gegen u	S. 57
6.3	Der konforme Modul	S. 65
6.4	Die Konvergenz von $v^{(n)}$ gegen v	S. 72
6.5	Die Konvergenz von $u^{(n)}$ beim Auftreten von Singularitäten	S. 74

7	DISKRETE HOLOMORPHIE BEI EINER MEHRSTELLENFORMEL	S. 78
8	DER QUADRATISCHE ANSATZ IN DREIECKEN	S. 84
8.1	Bedingungsgleichung für einen Kantenpunkt im Innern von G	S. 85
8.2	Bedingungsgleichung für einen Kantenpunkt am Rand C_1 von G	S. 86
8.3	Bedingungsgleichung für einen Eckpunkt im Innern von G	S. 87
8.4	Bedingungsgleichung für einen Eckpunkt am Rand C_1 von G	S. 88
8.5	Bedingungsgleichungen für Punkte im Innern von G im Fall von gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken	S. 89
9	DISKRETE HOLOMORPHIE IM FALL DES QUADRATISCHEN ANSATZES IM DREIECK	S. 91
9.1	Definition des Gitters	S. 91
9.2	q -diskrete Holomorphie	S. 94
9.3	Spezial- und Sonderfälle	S. 107
9.4	Anwendung der q -diskret-holomorphen Funktionen zur Konstruktion konformer Abbildungen	S. 111
9.5	Bemerkungen zur Konvergenz des konformen Moduls im quadratischen Fall	S. 115
9.6	Beispiele	S. 118
	LITERATURVERZEICHNIS	S. 123

1 EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

In der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen nehmen *Diskretisationsmethoden* eine zentrale Stellung ein. Bei diesen Methoden wird das Intervall, im Fall von partiellen Differentialgleichungen das Gebiet, in dem man sich für die numerische Lösung einer gegebenen Differentialgleichung interessiert, diskretisiert. Die diskreten Punkte des Intervalles oder des Gebietes bilden ein Gitter. Bei Randwertproblemen approximiert man in jedem Gitterpunkt die in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen durch entsprechende Differenzenquotienten, gebildet aus den Funktionswerten im Gitterpunkt und benachbarten Punkten und dem Abstand der Gitterpunkte (Differenzenverfahren). Bei Anfangswertproblemen wird ein Integral über ein kleines Intervall durch eine Quadraturformel angenähert, die nur die Funktionswerte (z.T. auch die Ableitung) an diskreten Stellen des Intervalles und die Länge des Integrationsintervalles verwendet. Auf diese Weise werden Probleme algebraisiert und einer numerischen Lösung zugänglich.

Diese Diskretisation soll an zwei Beispielen, die in den folgenden Betrachtungen wieder auftreten, erläutert werden:

1. Als grobe Approximation des bestimmten Integrals $\int_{x_v}^{x_{v+2}} f(x) dx$ dient etwa die Trapezregel:

$$\int_{x_v}^{x_{v+2}} f(x) dx \approx \frac{f(x_{v+2}) + f(x_v)}{2} (x_{v+2} - x_v) =: \int_{[x_v, x_{v+2}]}^{T_1} f(x) dx \quad (1.1)$$

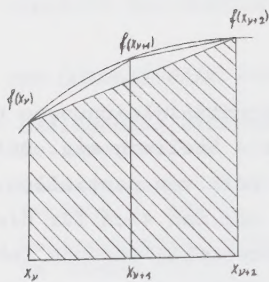


Fig. 1

Eine bessere Approximation erhält man für das Integral, wenn man den Funktionswert $f(x_{v+1})$ in der Mitte x_{v+1} des Intervalles $[x_v, x_{v+2}]$ dazunimmt:

$$\int_{x_v}^{x_{v+2}} f(x) dx \approx \frac{f(x_{v+2}) + 2f(x_{v+1}) + f(x_v)}{4} (x_{v+2} - x_v)$$

$$=: \int_{[x_v, x_{v+2}]}^{T_2} f(x) dx . \quad (1.2)$$

Für eine lineare Funktion $f(x)$ liefern $\int_{[x_v, x_{v+2}]}^{T_1} f(x) dx$ und $\int_{[x_v, x_{v+2}]}^{T_2} f(x) dx$ den exakten Wert von $\int_{x_v}^{x_{v+2}} f(x) dx$.

Durch eine lineare Kombination der beiden Näherungsintegrale (1.1) und (1.2) erhält man eine Quadraturformel, die auch für quadratische Funktionen $f(x)$ den exakten Wert des Integrals $\int_{x_v}^{x_{v+2}} f(x) dx$ ergibt:

$$\int_{x_v}^{x_{v+2}} f(x) dx \approx \frac{1}{3} \left(4 \int_{[x_v, x_{v+2}]}^{T_2} f(x) dx - \int_{[x_v, x_{v+2}]}^{T_1} f(x) dx \right) =: \int_{[x_v, x_{v+2}]}^S f(x) dx \quad (1.3)$$

$$= \frac{f(x_v) + 4f(x_{v+1}) + f(x_{v+2})}{6} (x_{v+2} - x_v).$$

Die Näherungsformel (1.3) ist die *Simpsonregel*.

2. In einem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet G der xy -Ebene mit dem stückweise stetig differenzierbaren Rand C sei das Dirichletproblem

$$\Delta u = 0$$

mit der Randbedingung

$$u = \phi(s),$$

wobei $\phi(s)$ eine Funktion der Bogenlänge auf C ist, gegeben. Hier wird der Laplace-Operator

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

der gesuchten Funktion $u(x,y)$ durch Differenzenquotienten

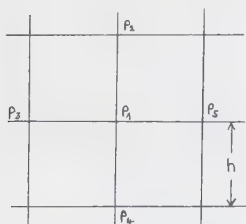


Fig. 2

angenähert. Dazu legt man in das Gebiet G ein quadratisches Netz der Maschenweite h mit Gitterpunkten $P_i = (x_i, y_i)$. Die einfachste Approximation für

$$\Delta u = 0$$

im Punkt P_1 (s. Fig. 2) lautet:

$$\frac{-4u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4) + u(P_5)}{h^2} = 0. \quad (1.4)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von (1.4) heisst *Fünfpunkteformel* und enthält die unbekannten Funktionswerte von $u(x,y)$ in fünf Gitterpunkten und die Maschenweite h des Gitters. Wird $\Delta u = 0$ in allen inneren Gitterpunkten P_i durch entsprechende Ausdrücke (1.4) angenähert, und berücksichtigt man für die Gitterpunkte am Rand C von G die Rand-

bedingungen, so entsteht ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $u(P_1)$, dessen Lösung eine Näherung der gesuchten Funktion $u(x,y)$ in den diskreten Punkten $P_1 \in G$ darstellt.

Die Uebertragung der Idee der Diskretisation auf *holomorphe Funktionen* $f(z) = u(z) + iv(z)$, mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, erfolgte durch J. Ferrand in [6] und [12]. Den Ausgangspunkt für den Begriff der diskreten Holomorphie bildet der *Satz von Morera* [1]:

Satz 1.1: Ist $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definiert und stetig und ist

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für alle geschlossenen Kurven γ in G , dann ist $f(z)$ in G holomorph.

Die diskrete Form des Satzes von Morera bildet nun die Grundlage der diskret-holomorphen Funktionen. Um solch eine diskrete Form zu definieren, diskretisieren wir zuerst das Gebiet. Es sei R ein Gitter mit quadratischen Maschen in einem beliebigen, einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und P und Q seien zwei benachbarte Gitterpunkte von R . Dann bildet

$$\int_{\overline{QP}}^{T_1} f(z) dz := \frac{f(Q) + f(P)}{2} (P - Q)$$

die Verallgemeinerung von (1.1) auf Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Für die diskrete Gitterfunktion

$$f: R \longrightarrow \mathbb{C}$$

führt J. Ferrand den Begriff der *Präholomorphie* ein:

Definition 1.1: Präholomorphie .

Eine Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst präholomorph,

wenn für alle Maschen q_i von R gilt

$$\oint_{q_i}^{T_1} f(z) dz = 0. \quad (1.5)$$

Präholomorphie lässt sich auch mit einer zu (1.5) äquivalenten Bedingung definieren:

Satz 1.2: Eine Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann präholomorph, wenn in einer beliebigen Masche q von R mit den im positiven Umlaufsinn genommenen Ecken P_1, Q_1, P_2, Q_2 gilt

$$i[f(Q_1) - f(Q_2)] = f(P_2) - f(P_1). \quad (1.6)$$

Beweis:

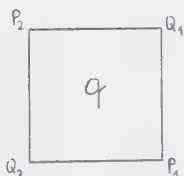


Fig.3

Wir betrachten (s. Fig. 3) eine quadratische Masche q mit den komplexen Gitterpunkten P_1, Q_1, P_2, Q_2 . Nach Definition 1.1 folgt

$$\begin{aligned} \oint_q^{T_1} f(z) dz &= \frac{f(Q_1) + f(P_1)}{2} (Q_1 - P_1) + \frac{f(P_2) + f(Q_1)}{2} (P_2 - Q_1) \\ &+ \frac{f(Q_2) + f(P_2)}{2} (Q_2 - P_2) + \frac{f(P_1) + f(Q_2)}{2} (P_1 - Q_2) \\ &= (P_2 - P_1) \frac{f(Q_1) - f(Q_2)}{2} + (Q_2 - Q_1) \frac{f(P_2) - f(P_1)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Da die Gitterpunkte komplex sind, ist auch $P_2 - P_1 \in \mathbb{C}$ und $Q_2 - Q_1 \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$Q_2 - Q_1 = i(P_2 - P_1).$$

Oben eingesetzt, ergibt sich

$$\oint_{\alpha} f(z) dz = (P_2 - P_1) \left(\frac{f(Q_1) - f(Q_2)}{2} + i \frac{f(P_2) - f(P_1)}{2} \right) = 0 .$$

Daraus folgt unmittelbar (1.6).

Die Umkehrung ist offensichtlich und soll hier nicht explizit ausgeführt werden. ■

Der Real- und Imaginärteil von (1.6),

$$-[v(Q_1) - v(Q_2)] = u(P_2) - u(P_1) \quad (1.7)$$

$$\text{bzw.} \quad u(Q_1) - u(Q_2) = v(P_2) - v(P_1) ,$$

bilden eine diskrete Version der *Cauchy - Riemann'schen Differentialgleichungen*, welche von einer holomorphen Funktion notwendigerweise erfüllt werden:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Wir wenden nun die Beziehung (1.6) auf die vier benachbarten

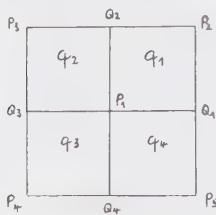


Fig. 4

Maschen $q_1, \dots, q_4$ (s. Fig. 4) an:

$$\begin{aligned} f(P_1) - f(P_2) &= i[f(Q_2) - f(Q_1)] \\ f(P_1) - f(P_3) &= i[f(Q_3) - f(Q_2)] \\ f(P_1) - f(P_4) &= i[f(Q_4) - f(Q_3)] \\ f(P_1) - f(P_5) &= i[f(Q_1) - f(Q_4)] . \end{aligned}$$

Werden diese vier Beziehungen addiert, so erhält man

$$4f(P_1) - f(P_2) - f(P_3) - f(P_4) - f(P_5) = 0 .$$

Der Real- und Imaginärteil davon,

$$4u(P_1) - u(P_2) - u(P_3) - u(P_4) - u(P_5) = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{und} \quad 4v(P_1) - v(P_2) - v(P_3) - v(P_4) - v(P_5) = 0 ,$$

sind Fünfpunkteformeln und stellen eine diskrete Form der Laplace'schen Differentialgleichungen

$$\Delta u = 0$$

und

$$\Delta v = 0$$

dar, welche von holomorphen Funktionen ebenfalls notwendigerweise erfüllt werden.

Die Fünfpunkteformeln (1.8) sind jedoch nicht mehr im ursprünglichen Gitter R definiert, sondern in einem Gitter R_1 , dessen Maschenseiten die Diagonalen der Maschen des ursprünglichen Gitters R sind. Das Gitter R_1 ist also gegenüber dem Gitter R um 45° verdreht, und die Maschenseiten sind um $\sqrt{2}$ länger als die des Gitters R .

Kennt man alle $f(P_i)$, $P_i \in R_1$, einer präholomorphen Funktion und einen einzigen Wert $f(Q)$, $Q \in R \setminus R_1 =: R_2$, so können mit (1.6) bzw. (1.7) alle Werte $f(Q_i)$, $Q_i \in R_2$ auf eindeutige Art berechnet werden. Ist z.B. die Randabbildung zwischen zwei Gebieten, welche konform aufeinander abgebildet werden sollen, bereits bekannt (etwa durch Lösen einer Integralgleichung [9]), so bekommt man durch Lösen des Dirichletproblems mittels (1.8) die Werte von $f(P_i)$.

Nun ist aber (1.8) die einfachste Differenzenformel zur Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung. Mehrstellenverfahren liefern eine genauere Approximation des Laplace-Operators Δu , während mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (im folgenden FEM = "Finite Element Methode" genannt) Δu auf einem Gitter approximiert wird, das sich sehr flexibel an das Grundgebiet G anpassen lässt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, mit Hilfe der FEM konforme Abbildungen zu konstruieren. Dazu wird die Definition einer präholomorphen Funktion derart verallgemeinert, dass an

Stelle der Fünfpunkteformeln (1.8) auf einem quadratischen Gitter die Bedingungsgleichungen der FEM auf dem Gitter R_1 , gebildet durch die Knotenpunkte einer vorgegebenen Elemententeilung des Gebietes G , resultieren. Um Präholomorphie (im folgenden *diskrete Holomorphie* genannt) in dieser Verallgemeinerung zu definieren, muss das durch die Knotenpunkte einer Elemententeilung von G gegebene Gitter R_1 geeignet zu einem Gitter R erweitert werden.

Gegenüber der Fünfpunkteformel bringt die FEM drei Vorteile:

1. Das Gitter kann sehr gut an das abzubildende Gebiet G angepasst werden. Der Rand von G wird polygonal approximiert.
2. Eine Gitterverfeinerung ist lokal möglich. Dadurch wird verhindert, dass die Zahl der Unbekannten um einen Faktor 4 steigt, wie das bei einer Verfeinerung des ganzen Gitters durch Halbierung der Maschenweite resultieren würde.
3. Die Symmetrie und positive Definitheit des resultierenden Gleichungssystems bleibt auch im Fall beliebiger endlicher, einfach zusammenhängender Gebiete G erhalten.

2 DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE ; LINEARER ANSATZ IN DREIECKEN.

Es sei G ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet der xy -Ebene mit dem stückweise stetig differenzierbaren Rand C . Es sei $C_1 \subset C$ ein echtes Teilstück des Randes C . Wir betrachten das folgende elliptische Randwertproblem (RWP):

In G soll eine Funktion $u(x,y)$ berechnet werden, welche den Bedingungen

1. $\Delta u = 0$ in G
2. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf C_1
3. $u = \phi(s)$ auf $C_2 := C \setminus C_1$

genügt, wobei $\phi(s)$ eine gegebene Funktion der Bogenlänge auf C_2 ist.

Zu diesem Problem äquivalent ist die Aufgabe, in G eine Funktion zu finden, welche den Integralausdruck

$$I_G(u) = \iint_G \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (2.1)$$

unter der Nebenbedingung

$$u = \phi(s) \text{ auf } C_2$$

minimiert [18].

Die zweite Problemformulierung bildet die Grundlage der FEM. Die gesuchte, $I_G(u)$ minimierende Funktion $u(x,y)$ wird mit stückweise linearem Ansatz approximiert. Dazu wird das Gebiet G trianguliert, und in jedem Dreieck T_i gelte für die gesuchte Funktion $u(x,y)$ der Ansatz

$$u(x,y) = k_1 + k_2 x + k_3 y . \quad (2.2)$$

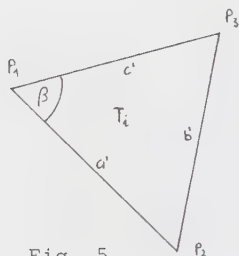


Fig. 5

Durch die Funktionswerte

$$u_j := u(p_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

in den im positiven Umlaufsinne numerierten Eckpunkten

$$p_j = (x_j, y_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

des Dreieckes T_i (s. Fig. 5)

sind die Parameter k_j ,

$j = 1, 2, 3$, eindeutig bestimmt.

Für

$$I_{T_i}(u) = \iint_{T_i} \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

erhält man dann [18]

$$I_{T_i}(u) = \frac{1}{2} \underline{u}_e^T S_e \underline{u}_e, \quad (2.3)$$

wobei

$$\underline{u}_e = (u_1, u_2, u_3)^T,$$

$$S_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+2b+c & -(c+b) & -(a+b) \\ -(c+b) & c & b \\ -(a+b) & b & a \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

und

$$\left. \begin{aligned} a &= [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] / J, \\ b &= -[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)] / J, \\ c &= [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] / J, \\ J &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1), \\ &= \text{doppelte Dreiecksfläche.}^{1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

¹⁾ In den Definitionen (2.5) haben a und c gegenüber den Bezeichnungen in [18] eine vertauschte Bedeutung.

Die Längen der Seiten wollen wir wie folgt bezeichnen:

$$\begin{aligned} a' &:= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ b' &:= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}, \\ c' &:= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (2.5) unmittelbar

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{a'^2}{J}, \\ b &= \frac{-a'c' \cos \beta}{J} = \frac{b'^2 - a'^2 - c'^2}{J} \quad (\text{Kosinussatz}), \\ c &= \frac{c'^2}{J}. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Die Ansätze in benachbarten Dreiecken sind auf der gemeinsamen Dreiecksseite stetig, so dass die so definierte Funktion $u(x,y)$ zu einer für die Variationsaufgabe zulässigen Funktionenklasse gehört.

Für das folgende benötigen wir die

Definition 1.1: Innerer Punkt von R_1 .

Ein Punkt $P_i \in R_1$, $P_i \notin C$, heisst innerer Punkt des Gitters R_1 .

2.1. Bedingungsgleichung für einen inneren Punkt von R_1 .

Wir betrachten alle Dreiecke der Triangulierung mit dem gemeinsamen inneren Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Die zum Dreieck T_i gehörenden Parameter seien mit a_i , b_i , c_i bzw. J_i bezeichnet, die Länge der Dreiecksseiten mit a'_i , b'_i bzw. c'_i . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Numerierung der Knotenpunkte gemäss Fig. 6 erfolgt. Durch die Festsetzung, dass

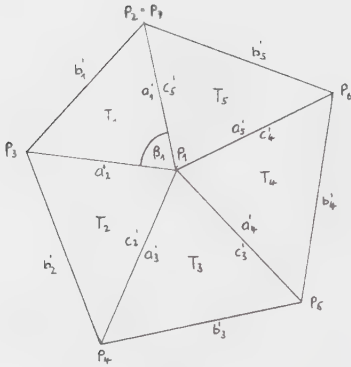


Fig. 6

$a_i = [(x_{i+1} - x_1)^2 + (y_{i+1} - y_1)^2] / J_i$,
 $i = 1, \dots, 5$, sind auch alle b_i ,
 c_i, a'_i, b'_i und c'_i festgelegt.

Für das Minimum von $I_G(u)$ im
 Fall von linearen Ansatzfunk-
 tionen gilt notwendigerweise

$$\frac{\partial I_G(u)}{\partial u_1} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial I_{T_i}(u)}{\partial u_1} = 0,$$

mit

$$\frac{\partial I_{T_i}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} [(a_i + 2b_i + c_i)u_1 - (c_i + b_i)u_{i+1} - (a_i + b_i)u_{i+2}],$$

wobei $P_2 = P_7$. Die diskreten Gitterwerte von u erfüllen daher die
 Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 (a_i + 2b_i + c_i) \right] u_1 - \frac{1}{2} (c_1 + b_1 + a_5 + b_5) u_2 - \frac{1}{2} (c_2 + b_2 + a_1 + b_1) u_3 \\ & - \frac{1}{2} (c_3 + b_3 + a_2 + b_2) u_4 - \frac{1}{2} (c_4 + b_4 + a_3 + b_3) u_5 - \frac{1}{2} (c_5 + b_5 + a_4 + b_4) u_6 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ersetzen wir in (2.7) die Parameter a_i, b_i und c_i gemäss (2.6),
 erhalten wir als notwendige Bedingung die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^5 \frac{b_i'^2}{2J_i} \right) u_1 - \left(\frac{b_1'^2 - a_1'^2 + c_1'^2}{4J_1} + \frac{b_5'^2 + a_5'^2 - c_5'^2}{4J_5} \right) u_2 \\ & - \left(\frac{b_2'^2 - a_2'^2 + c_2'^2}{4J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} \right) u_3 - \left(\frac{b_3'^2 - a_3'^2 + c_3'^2}{4J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) u_4 \\ & - \left(\frac{b_4'^2 - a_4'^2 + c_4'^2}{4J_4} + \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{4J_3} \right) u_5 - \left(\frac{b_5'^2 - a_5'^2 + c_5'^2}{4J_5} + \frac{b_4'^2 + a_4'^2 - c_4'^2}{4J_4} \right) u_6 \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Im Spezialfall, wo P_1 Eckpunkt von vier gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken ist, reduziert sich (2.8) auf (1.8).

2.2 Bedingungsgleichung für einen Randpunkt von C_1 .

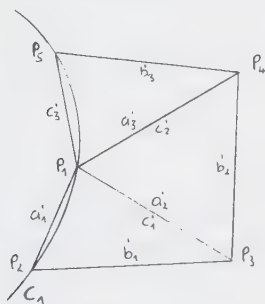


Fig. 7

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien P_2 , P_1 und P_5 Punkte auf C_1 gemäß Fig. 7. Für das Minimum von $I_G(u)$ im Fall der in T_i linearen Funktionen ergibt sich aus

$$\frac{\partial I_G(u)}{\partial u_1} = 0$$

die Bedingungsgleichung

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{b_i'^2}{2J_i} \right) u_1 - \frac{b_1'^2 - a_1'^2 + c_1'^2}{4J_1} u_2 - \left(\frac{b_2'^2 - a_2'^2 + c_2'^2}{4J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} \right) u_3$$

$$\left(\frac{b_3'^2 - a_3'^2 + c_3'^2}{4J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) u_4 - \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{4J_3} u_5 = 0. \quad (2.9)$$

3 DISKRETE HOLOMORPHIE IM FALL DES LINEAREN ANSATZES IM DREIECK

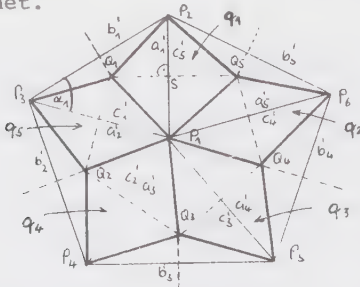
Das durch eine gegebene Triangulierung definierte Gitter R_1 ergänzen wir durch ein Hilfsgitter R_2 derart, dass auf $R := R_1 \cup R_2$ die diskrete Holomorphie einer Funktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert werden kann, so dass im Innern von R_1 (2.8) resultiert.

3.1 Definition des Gitters

Wie in Kap. 2 sei G das endliche, einfach zusammenhängende Gebiet der xy -Ebene. G sei derart trianguliert, dass die Winkel $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ der Dreiecke T_i der Triangulierung den Bedingungen

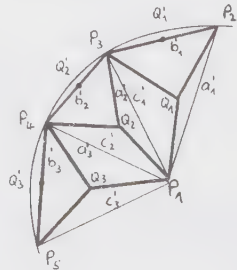
$$\alpha_i \leq 90^\circ, \quad \beta_i \leq 90^\circ, \quad \gamma_i \leq 90^\circ$$

genügen. Durch diese Forderung wird erreicht, dass der Umkreismittelpunkt Q_i im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks T_i liegt. Zusätzlich werden numerische Instabilitäten, welche durch zwei sehr kleine Winkel im selben Dreieck auftreten [23], vermieden. Die Eckpunkte $P_i = (x_i, y_i)$ der Triangulierung bilden das Gitter R_1 . In Fig. 8 ist die Triangulierung ausgezogen gezeichnet.



Ausschnitt des Gitters R und R_1 mit dem im Innern von G liegenden Punkt P_1 als ausgezeichneten Gitterpunkt

Fig. 8



Ausschnitt des Gitters R und R_1 am Rand von G

Fig. 9

Die Mittelpunkte der Seiten, welche den Rand von G approximieren, seien mit Q'_j bezeichnet, wobei der Index j gesetzt wird, wenn die entsprechende Seite zum Dreieck T_j gehört (s. Fig. 9). Ist speziell Q'_j Mittelpunkt der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks T_j , so ist $Q_j = Q'_j$. Die Q_i und Q'_j bilden ein Gitter R_2 , dessen Maschen (unregelmässige) n -Ecke mit $n \geq 4$ (in Fig. 8 gestrichelt gezeichnet) sind.

Die beiden Gitter R_1 und R_2 bilden ein Gitter $R := R_1 \cup R_2$. Als Maschen q_i dieses Gitters (in Fig. 8 dick ausgezogen) definieren wir die Vierecke, von denen je zwei gegenüberliegende Ecken zu R_1 bzw. zu R_2 gehören. Die Diagonalen der Maschen q_i sind orthogonal. Am Rand von G besitzen die Maschen einen Winkel von 180° .

Bemerkung 1: Würden wir die Bedingung, dass alle vorkommenden Dreieckswinkel $\leq 90^\circ$ sein müssen, fallen lassen, könnten sich überlappende Maschen von R auftreten. Das hätte noch keine Konsequenzen, solange man nur an Gitterwerten von diskret-holomorphen Funktionen interessiert ist. Bei einer Fortsetzung der Gitterfunktionen in die Maschen von R hinein resultierte jedoch in sich überlappenden Maschen Mehrdeutigkeit.

Durch die Forderung, dass alle Dreieckswinkel $\leq 90^\circ$ sind, wird Ueberlappung a priori ausgeschlossen. Wegen der grossen Flexibilität der Elemententeilung ist das jedoch keine wesentliche Einschränkung.

Bemerkung 2: Das Gitter R_2 wird durch R_1 festgelegt. Es soll daher das zu R_1 konjugierte Gitter genannt werden.

Identifizieren wir nun die xy -Ebene mit $\mathbb{C}$, so bilden $P_i \in R$ und $Q_j \in R$ diskrete Punkte von $\mathbb{C}$. Auf $R \subset \mathbb{C}$ wird die diskrete Holomorphie definiert.

3.2 ℓ -diskrete Holomorphie.

Sei $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und seien $P_1 \in R_1 \subset \mathbb{C}$ und $Q_1 \in R_2 \subset \mathbb{C}$ zwei Punkte derselben Masche q von R . Analog (1.1) wird ein Kurvenintegral von g längs der Maschenseite von P_1 nach Q_1 approximiert durch

$$\int_{\widehat{P_1 Q_1}} g(z) dz \approx \frac{g(P_1) + g(Q_1)}{2} (Q_1 - P_1) =: \int_{\widehat{P_1 Q_1}}^{T_1} g(z) dz. \quad (3.1)$$

Die Näherung $\int_{\widehat{P_1 Q_1}}^{T_1} g(z) dz$ von $\int_{\widehat{P_1 Q_1}} g(z) dz$ enthält nur die Grösse

$Q_1 - P_1$ und die diskreten Werte $g(Q_1)$ und $g(P_1)$ und ist damit insbesondere für Gitterfunktionen auf R definiert.

Mit dieser Vorbereitung kann der Begriff der diskreten Holomorphie eingeführt werden.

Definition 3.1: ℓ -diskrete Holomorphie.

Eine Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst ℓ -diskret-holomorph¹⁾, wenn

$$\oint_{q_i}^{T_1} f(z) dz = 0 \quad (3.2)$$

gilt für alle Maschen q_i des Gitters R .

Als Grundlage dieser Definition dient wieder der Satz von Morera (s. Satz 1.1). Die Verallgemeinerung von Satz 1.2 ist

Satz 3.1: Eine Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann ℓ -diskret-holomorph, wenn in einer beliebigen Masche

¹⁾ In der Bezeichnung " ℓ -diskret-holomorph" deutet der Buchstabe " ℓ " an, dass die diskrete Holomorphie einer Gitterfunktion im Fall des linearen Ansatzes im Dreieck mit (3.2) definiert wird.

q von R mit den im positiven Umlaufsinn genommenen Ecken P_1, Q_5, P_2, Q_1 gilt

$$i [f(Q_5) - f(Q_1)] = \left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} \right| [f(P_2) - f(P_1)]. \quad (3.3)$$

Beweis: Wir wenden Definition 3.1 auf die Masche q_1 von Fig. 8 mit den komplexen Eckpunkten P_1, Q_5, P_2 und Q_1 an. Aus

$$\oint_{q_1}^T f(z) dz = 0$$

folgt die Bedingungsgleichung

$$(P_2 - P_1)[f(Q_5) - f(Q_1)] + (Q_1 - Q_5)[f(P_2) - f(P_1)] = 0. \quad (3.4)$$

Wegen der Orthogonalität der Maschendiagonalen gilt

$$\frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} = i \left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} \right| = -\frac{1}{i} \left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} \right|. \quad (3.5)$$

Dividiert man (3.4) durch $(P_2 - P_1)$ und berücksichtigt (3.5), so ergibt sich (3.3).

Die Umkehrung ist wiederum offensichtlich und soll hier nicht speziell gezeigt werden. ■

Bezeichnung: Im folgenden soll statt " $f(P_i)$ ", " $u(P_i)$ " und " $v(P_i)$ " nur noch " f_i ", " u_i " und " v_i " geschrieben werden.

Dividieren wir (3.3) durch $|Q_1 - Q_5|$ und betrachten Real- und Imaginärteil getrennt, so erhalten wir die diskrete Form der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{v(Q_1) - v(Q_5)}{|Q_1 - Q_5|} = \frac{u_2 - u_1}{|P_2 - P_1|} ; \quad \frac{u(Q_1) - u(Q_5)}{|Q_1 - Q_5|} = - \frac{v_2 - v_1}{|P_2 - P_1|} . \quad (3.6)$$

Der Bruch $\left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} \right|$ wird nun auf die Längen der Dreiecksseiten $a_1', b_1', c_1', a_5', b_5', c_5'$ und die doppelten Dreiecksflächen J_1 und J_5 zurückgeführt.

Lemma 3.2:
$$\left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} \right| = \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} + \frac{b_5'^2 + a_5'^2 - c_5'^2}{4J_5} . \quad (3.7)$$

Beweis: Der Umkreisradius $|Q_1 - P_1|$ ist nach [24]

$$|Q_1 - P_1| = \frac{a_1' b_1' c_1'}{2J_1} . \quad (3.8)$$

$\left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} \right|$ lässt sich aufspalten in zwei Summanden (s. Fig. 8)

$$\left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_2 - P_1} \right| = \left| \frac{Q_1 - S}{P_2 - P_1} \right| + \left| \frac{S - Q_5}{P_2 - P_1} \right| ,$$

die sich wie folgt auf die Seitenlängen a_1', b_1', c_1' und J_1 bzw. a_5', b_5', c_5' und J_5 zurückführen lassen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q_1 - S}{P_2 - P_1} \right| &= \frac{\sqrt{|Q_1 - P_1|^2 - |S - P_1|^2}}{|P_2 - P_1|} = \frac{\sqrt{\frac{a_1'^2 b_1'^2 c_1'^2}{4J_1^2} - \frac{a_1'^2}{4}}}{a_1'} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1'^2 c_1'^2}{J_1^2} - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1'^2 c_1'^2 - J_1^2}{J_1^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1'^2 c_1'^2 - b_1'^2 c_1'^2 \sin^2 \alpha_1}{J_1^2}} = \frac{b_1' c_1'}{2J_1} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$= \frac{b_1' c_1'}{2J_1} \cos \alpha_1 .$$

Wenden wir auf den letzten Ausdruck den Kosinussatz an

$$b_1' c_1' \cos \alpha_1 = \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{2},$$

so erhalten wir die Beziehung

$$\left| \frac{Q_1 - S}{P_2 - P_1} \right| = \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} . \quad (3.9)$$

Ganz analog gilt

$$\left| \frac{S - Q_5}{P_2 - P_1} \right| = \frac{b_5'^2 + a_5'^2 - c_5'^2}{4J_5} .$$

Zusammen ergibt sich die Behauptung (3.7) .

■

Mit Hilfe dieses Lemmas beweisen wir den

Satz 3.3: Der Realteil (Imaginärteil) einer ℓ -diskret-holomorphen Funktion erfüllt im Innern des Gitters R_1 die FEM-Formel (2.8) .

Beweis: Sei $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ ℓ -diskret-holomorph. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Situation der Fig. 8 gegeben, und der Beweis werde mit jenen Bezeichnungen geführt. Auf die Maschen $q_1, \dots, q_5$ wenden wir (3.3) an:

$$\left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_1 - P_2} \right| (f_1 - f_2) = i[f(Q_1) - f(Q_5)]$$

$$\left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_1 - P_3} \right| (f_1 - f_3) = i[f(Q_2) - f(Q_1)]$$

$$\left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_1 - P_4} \right| (f_1 - f_4) = i[f(Q_3) - f(Q_2)]$$

$$\left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_1 - P_5} \right| (f_1 - f_5) = i[f(Q_4) - f(Q_3)]$$

$$\left| \frac{Q_5 - Q_4}{P_1 - P_6} \right| (f_1 - f_6) = i[f(Q_5) - f(Q_4)] .$$

Die Addition der fünf Beziehungen ergibt

$$\left(\left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_1 - P_2} \right| + \left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_1 - P_3} \right| + \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_1 - P_4} \right| + \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_1 - P_5} \right| + \left| \frac{Q_5 - Q_4}{P_1 - P_6} \right| \right) f_1 - \left| \frac{Q_1 - Q_5}{P_1 - P_2} \right| f_2 - \left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_1 - P_3} \right| f_3 - \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_1 - P_4} \right| f_4 - \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_1 - P_5} \right| f_5 - \left| \frac{Q_5 - Q_4}{P_1 - P_6} \right| f_6 = 0. \quad (3.10)$$

Wendet man für die einzelnen Brüche sinngemäss Lemma 3.2 an und berücksichtigt nur den Realteil (Imaginärteil), so erhält man, weil die Bezeichnungen der Triangulierung in den Figuren 8 und 6 übereinstimmen, die Formel (2.8).

Satz 3.4: Kennt man die Realteile $u(R_1)$ (Imaginärteile $v(R_1)$) einer ℓ -diskret-holomorphen Funktion auf dem Gitter R_1 und den Wert des Imaginärteiles $v(Q_0)$ (Realteiles $u(Q_0)$) eines einzigen Gitterpunktes $Q_0 \in R_2$, so kann man mit Hilfe von (3.6) die Imaginärteile $v(R_2)$ (Realteile $u(R_2)$) des ganzen Gitters R_2 eindeutig berechnen.

Beweis: Wir beschränken uns darauf zu zeigen, dass $v(R_2)$ eindeutig berechnet werden kann. Die Eindeutigkeit der Berechnung von $u(R_2)$ zeigt man genau gleich.

Sei u Realteil einer ℓ -diskret-holomorphen Funktion $f: R \rightarrow \mathbb{C}$. Es sei $\tilde{Q} \in R_2$ jener Punkt, dessen Funktionswert $v(\tilde{Q})$ mittels $v(Q_0)$ und $u(R_1)$ berechnet wird. Dazu legen wir einen Polygonzug Γ_1 , bestehend aus Maschenseiten von R_2 , von Q_0 nach $\tilde{Q}$ und berechnen der Reihe nach mittels (3.6) $v(Q_i)$, $Q_i \in \Gamma_1$.

Da sich jeder Polygonzug Γ_i , der Q_0 mit $\tilde{Q}$ verbindet, durch eine Folge solch kleiner Polygonzugänderungen aus Γ_1 konstruieren lässt, wird

$$v_{\Gamma_i}(\tilde{Q}) = v_{\Gamma_1}(\tilde{Q}) \quad \text{für alle } \Gamma_i,$$

womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. ■

Korollar 3.5: Erfüllen der Realteil u und der Imaginärteil v einer gegebenen Gitterfunktion $f_1: R_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ im Innern des Gitters R_1 die Formel (2.8), dann kann f_1 bei Kenntnis eines Funktionswertes $f(Q_0)$, $Q_0 \in R_2$, eindeutig zu einer ℓ -diskret-holomorphen Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f|_{R_1} = f_1$ erweitert werden.

Beweis: Nach Satz 3.4 berechnet man mit (3.6) $u(R_2)$ und $v(R_2)$ eindeutig. In jeder Masche von R gilt dann (3.3), was mit (3.2) äquivalent ist. f ist daher ℓ -diskret-holomorph. ■

Bemerkung: Die Erweiterung von $f_1: R_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ zur ℓ -diskret-holomorphen Funktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ ist abhängig vom Wert $f(Q_0)$, $Q_0 \in R_2$. Da $f(Q_0)$ beliebig sein kann, existieren unendlich viele Erweiterungen.

Sei $f_1(R_1)$ gegeben und $f(Q_0) = K_1$, $\overset{*}{f}(Q_0) = K_2$, $K_1 \neq K_2$, $Q_0 \in R_2$. Die Erweiterungen

$$f \quad \text{mit } f(Q_0) = K_1 \quad \text{und } f|_{R_1} = f_1$$

und

$$\overset{*}{f} \quad \text{mit } \overset{*}{f}(Q_0) = K_2 \quad \text{und } \overset{*}{f}|_{R_1} = f_1$$

unterscheiden sich jedoch nur um die Konstante $K_1 - K_2$, wie man sofort einsieht, wenn in (3.11) die eckige Klammer mit Hilfe von (3.6) in einen Ausdruck verwandelt wird, der nur von Funktionswerten $u(P_i)$, $P_i \in R_1$, abhängig ist. ■

3.3 Spezial- und Sonderfälle

1. In der Anwendung tritt häufig der Fall auf, dass in der Triangulierung rechtwinklige Dreiecke vorkommen. Für uns ist dieser Fall insofern bedeutsam, als die Umkreismittelpunkte solcher Dreiecke auf die Hypotenuse zu liegen kommen. Wir betrachten zuerst den Fall, wo zwei benachbarte rechtwinklige Dreiecke eine gemeinsame Hypotenuse besitzen (s. Fig.

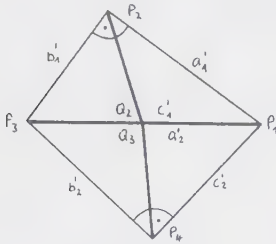


Fig. 11

11). Hier fallen die Umkreismittelpunkte Q_2 und Q_3 zusammen. Der Beitrag

$$\left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_3 - P_1} \right| (f_1 - f_3)$$

zu (3.10) wird wegen $Q_2 = Q_3$

Null. Dieses Resultat bringt für den Realteil auch die

FEM, denn der Beitrag von u_3 zu $\frac{\partial I}{\partial u_1}$ ist nach (2.8)

$$\left(\frac{b_2'^2 - a_2'^2 + c_2'^2}{4J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} \right) u_3,$$

und das ist, wie man aus Fig. 11 abliest, Null.

Die zum "Zweieck" degenerierte Masche $P_1Q_2P_3Q_3$ muss deshalb gar nicht als solche betrachtet werden.

Bemerkung:

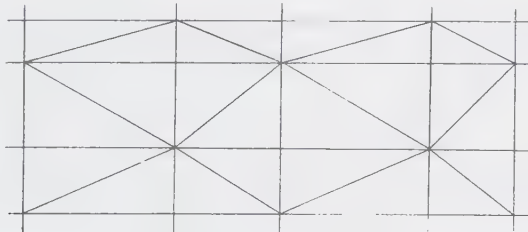
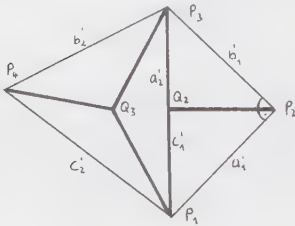


Fig. 12

Legen wir der Triangulierung eine Rechteckseinteilung mit variabler Seitenlänge gemäss Fig.12 zugrunde und triangulieren wir so, dass jedes Rechteck in zwei Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse zerfällt, dann ist (3.10) identisch mit der Formel (7) in [16].

2. Wir betrachten den auch häufig vorkommenden Fall, dass die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes nicht Hypotenuse des benachbarten Dreieckes ist (s. Fig. 13). Eine Masche des Gitters R ist hier das "Viereck" $P_1Q_2P_3Q_3$. Der Beitrag



$$\left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_3 - P_1} \right| (f_1 - f_3)$$

zu (3.10) ist dann nach (3.9) noch

$$\frac{b_2'^2 + c_2'^2 - a_2'^2}{4J_2} (f_1 - f_9),$$

Fig. 13

wieder in Uebereinstimmung mit dem Resultat der FEM für den Beitrag

des Realteiles u_3 zu $\frac{\partial I}{\partial u_1}$ nach (2.8).

4 DIE ERWEITERUNG VON R_1 IM FALL EINES PARALLELOGRAMMANSATZES

Die Elemente, in die das Gebiet G der xy -Ebene zerlegt ist, seien Parallelelogramme. Zu jedem Element suchen wir für die Funktion $u(x,y)$ einen Ansatz, der auf jeder Parallelogrammseite linear ist. Um diesen Ansatz zu beschreiben, wird das in Frage stehende Parallelogramm mit den im positiven Umlaufsinn genommenen

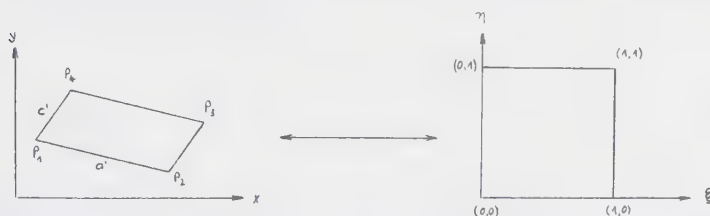


Fig. 14

Eckpunkten $P_i = (x_i, y_i)$, $i=1, \dots, 4$, mittels der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\eta, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\eta \end{aligned} \quad (4.1)$$

eindeutig auf das Einheitsquadrat abgebildet. Im Einheitsquadrat definieren wir eine bilineare Funktion

$$u(\xi, \eta) = k_1 + k_2\xi + k_3\eta + k_4\xi\eta, \quad (4.2)$$

deren Parameter k_i , $i=1, \dots, 4$, durch die Werte der Funktion $u(\xi, \eta)$ an den Stellen $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$ eindeutig bestimmt sind. Wird das Einheitsquadrat durch (4.1) linear auf das ursprüngliche Parallelogramm abgebildet, so geht (4.2) in den gesuchten, auf jeder Parallelogrammseite linearen, Ansatz über. Für diesen Ansatz erhält die Steifigkeitsmatrix die Form [18]

$$S_e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2a+3b+2c & -2c+a & -a-3b-c & c-2a \\ -2c+a & 2a-3b+2c & c-2a & -a+3b-c \\ -a-3b-c & c-2a & 2a+3b+2c & -2c+a \\ c-2a & -a+3b-c & -2c+a & 2a-3b+2c \end{bmatrix},$$

wobei

$$a = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]/J,$$

$$b = -[(x_4 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_4 - y_1)(y_2 - y_1)]/J,$$

$$c = [(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2]/J,$$

$$J = (x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1) \\ = \text{Parallelogrammfläche.}^{1)}$$

Bezeichnen wir die Längen der Seiten, bzw. einer Diagonalen mit

$$a' := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$b' := \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2},$$

$$c' := \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2},$$

so gilt wieder (2.6).

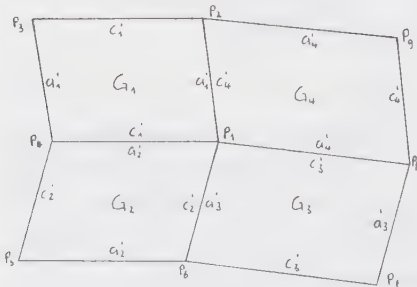


Fig. 15

Wir betrachten nun alle Parallelogramme \$G_i\$ mit einem gemeinsamen, im Innern von \$G\$ liegenden Punkt \$P_1\$. Als notwendige Bedingung für das Minimum von \$I_G(u)\$ im Fall von Ansatzfunktionen, die auf jeder Parallelogrammseite linear sind, ergibt sich die Gleichung

¹⁾ Die Bedeutung von \$a\$ und \$c\$ sind gegenüber den Bezeichnungen in [18], wie schon in Kap.2 und Kap.3, vertauscht.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \{ (-a_1 - 3b_1 - c_1)u_3 + (-a_2 - 3b_2 - c_2)u_5 + (-a_3 - 3b_3 - c_3)u_7 \\ & + (-a_4 - 3b_4 - c_4)u_9 + (-2c_3 + a_3 + c_2 - 2a_2)u_6 + (-2c_4 + a_4 + c_3 - 2a_3)u_8 \\ & + (-2c_1 + a_1 + c_4 - 2a_4)u_2 + (-2c_2 + a_2 + c_1 - 2a_1)u_4 \\ & + [2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4) + 3(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)]u_1 \} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3) ist, wie (2.8) und (1.8), eine Differenzenapproximation der Differentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

im Punkt P_1 .

Das Gitter, das durch die Parallelogrammeinteilung definiert wird, sei mit R_P bezeichnet. Es stellt sich nun die Frage, ob R_P derart zu einem Gitter R erweitert werden kann, dass für den Real- und Imaginärteil einer in R ℓ -diskret-holomorphen Funktion im Innern des Gitters R_P die Gleichung (4.3) gilt. Eine Aussage im Fall einer ganz speziellen Parallelogrammeinteilung erhält man durch den

Satz 4.1: Das Gitter R_P , welches aus der speziellen Parallelogrammeinteilung in Quadrate hervorgeht, lässt sich nicht derart zu einem Gitter R mit sich nicht überlappenden Maschen erweitern, dass im Innern von R_P für den Real- und Imaginärteil einer in R ℓ -diskret-holomorphen Funktion die Gleichung (4.3) gilt.

Beweis: Für die spezielle Parallelogrammeinteilung in Quadrate wird (4.3) zu

$$\frac{8u_1 - u_3 - u_5 - u_7 - u_9 - u_2 - u_4 - u_6 - u_8}{3} = 0. \quad (4.3')$$

Wir nehmen an, dass, entgegen der Aussage des Satzes, ein Gitter R existiert. Um dieses zu konstruieren, betrachten wir ein spezielles Quadrat G_i der Einteilung mit den Eckpunkten $P_i \in R_P$,

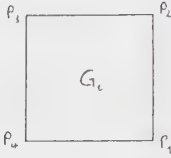


Fig. 16 a

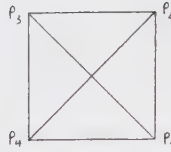


Fig. 16 b

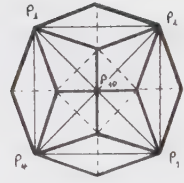


Fig. 16 c

$i=1, \dots, 4$ (s. Fig. 16 a). Wir verbinden nun für jedes j , $j=1, \dots, 4$, alle Punkte, deren Funktionswert im Ausdruck $\frac{\partial I_{G_i}}{\partial u_j}$ vorkommt,

mit P_j (s. Fig. 16 b). Hier ist es nicht möglich, Vierecke mit orthogonalen Diagonalen so zu konstruieren, dass die ausgezeichneten Linien zu Diagonalen dieser Vierecke werden. Wir definieren daher das neue, erweiterte Gitter

$$R_1 := R_P \cup \{\text{Quadratmittelpunkte}\}.$$

In R_1 legen wir nun ein Gitter R , dessen Maschen orthogonale Diagonalen besitzen gemäß Fig. 16 c.

In den vier Quadraten mit dem gemeinsamen Punkt P_1 betrachten wir ein Gitter R , dessen Maschen noch unbekannte Diagonalenverhältnisse aufweisen (s. Fig. 17).

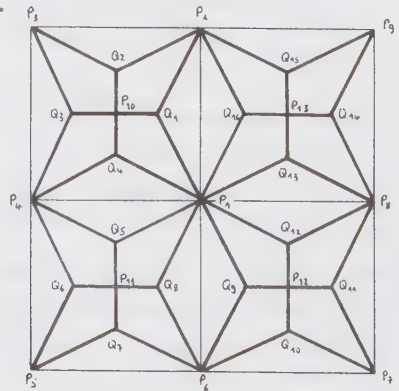


Fig. 17

Wir wollen das Längenverhältnis

$$K := \left| \frac{Q_1 - Q_{16}}{P_2 - P_1} \right| = \left| \frac{Q_5 - Q_4}{P_4 - P_1} \right| = \left| \frac{Q_9 - Q_8}{P_6 - P_1} \right| = \left| \frac{Q_{13} - Q_{12}}{P_8 - P_1} \right|$$

der Diagonalen der Maschen $P_1 Q_{16} P_2 Q_1$, $P_1 Q_4 P_4 Q_5$, $P_1 Q_8 P_6 Q_9$ und $P_1 Q_{12} P_8 Q_{13}$ so bestimmen, dass der Real- und Imaginärteil einer in R ℓ -diskret-holomorphen Gitterfunktion in $R_P \subset R$ der Formel (4.3') genügt. Für das Längenverhältnis der Diagonalen der restlichen Maschen mit gemeinsamem Punkt P_1 erhält man

$$\left| \frac{Q_4 - Q_1}{P_{10} - P_1} \right| = \left| \frac{Q_8 - Q_5}{P_{11} - P_1} \right| = \left| \frac{Q_{12} - Q_9}{P_{12} - P_1} \right| = \left| \frac{Q_{16} - Q_{13}}{P_{13} - P_1} \right| = 1 - K.$$

In den acht Maschen von R , welche den Punkt P_1 gemeinsam haben, gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} K(f_1 - f_2) &= i[f(Q_1) - f(Q_{16})], \\ (1-K)(f_1 - f_{10}) &= i[f(Q_4) - f(Q_1)], \\ K(f_1 - f_4) &= i[f(Q_5) - f(Q_4)], \\ (1-K)(f_1 - f_{11}) &= i[f(Q_8) - f(Q_5)], \\ K(f_1 - f_6) &= i[f(Q_9) - f(Q_8)], \\ (1-K)(f_1 - f_{12}) &= i[f(Q_{12}) - f(Q_9)], \\ K(f_1 - f_8) &= i[f(Q_{13}) - f(Q_{12})], \\ (1-K)(f_1 - f_{13}) &= i[f(Q_{16}) - f(Q_{13})]. \end{aligned}$$

Addieren wir alle acht Beziehungen, erhalten wir als Summe

$$\begin{aligned} &K[(f_1 - f_2) + (f_1 - f_4) + (f_1 - f_6) + (f_1 - f_8)] \\ &+ (1-K)[(f_1 - f_{10}) + (f_1 - f_{11}) + (f_1 - f_{12}) + (f_1 - f_{13})] = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Summanden

$$f_1 - f_j, \quad j=10, \dots, 13,$$

in (4.4) lassen sich zurückführen auf die Summanden

$$f_1 - f_k, \quad k=2, \dots, 9,$$

denn im Quadrat $P_1 P_2 P_3 P_4$ gelten die Beziehungen

$$(1-K)(f_1 - f_{10}) = i[f(Q_4) - f(Q_1)],$$

$$(1-K)(f_4 - f_{10}) = i[f(Q_3) - f(Q_4)],$$

$$(1-K)(f_3 - f_{10}) = i[f(Q_2) - f(Q_3)],$$

$$(1-K)(f_2 - f_{10}) = i[f(Q_1) - f(Q_2)].$$

Addition und Division durch $(1-K)$ ergibt

$$f_1 - f_{10} + f_4 - f_{10} + f_3 - f_{10} + f_2 - f_{10} = 0,$$

woraus

$$f_{10} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{4} \quad 1) \quad (4.5)$$

und daraus

$$f_1 - f_{10} = \frac{f_1 - f_2}{4} + \frac{f_1 - f_3}{4} + \frac{f_1 - f_4}{4} \quad (4.6)$$

folgt.

Setzen wir (4.6) und entsprechende Ausdrücke für $f_1 - f_{11}, f_1 - f_{12}$ und $f_1 - f_{13}$ in (4.4) ein, bekommen wir

$$\begin{aligned} & K[(f_1 - f_2) + (f_1 - f_4) + (f_1 - f_6) + (f_1 - f_8)] \\ & + (1-K) \left(\frac{f_1 - f_2}{2} + \frac{f_1 - f_3}{4} + \frac{f_1 - f_4}{2} + \frac{f_1 - f_5}{4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{f_1 - f_6}{2} + \frac{f_1 - f_7}{4} + \frac{f_1 - f_8}{2} + \frac{f_1 - f_9}{4} \right) \end{aligned}$$

1) Diese Beziehung für den Funktionswert im Zentrum eines Quadrates, die für ℓ -diskret-holomorphe Funktionen hergeleitet wurde, gilt übrigens auch für den bilinearen Ansatz im Quadrat.

$$= \frac{1+K}{2} [(f_1-f_2)+(f_1-f_4)+(f_1-f_6)+(f_1-f_8)] \\ + \frac{1-K}{4} [(f_1-f_3)+(f_1-f_5)+(f_1-f_7)+(f_1-f_9)] = 0. \quad (4.7)$$

Vergleichen wir den Realteil von Gleichung (4.7) mit (4.3') und machen einen Koeffizientenvergleich, so muss, weil die Koeffizienten von u_k , $k=2, \dots, 9$, in (4.3') alle gleich sind,

$$\frac{K+1}{2} = \frac{1-K}{4}$$

sein, was mit

$$K = -\frac{1}{3} \quad (4.8)$$

erfüllt ist.

Setzen wir $K = -\frac{1}{3}$ in (4.7) ein, so wird der Realteil von (4.7) gleich der Gleichung (4.3'). Da das Verhältnis der Diagonalen negativ sein müsste, ist gezeigt, dass für die Quadrateinteilung kein R mit sich nicht überlappenden Maschen existiert.

Bemerkung 1: Wollen wir sich überlappende Maschen zulassen, so bekommt (4.8) folgende geometrische Interpretation (s. Fig. 18):

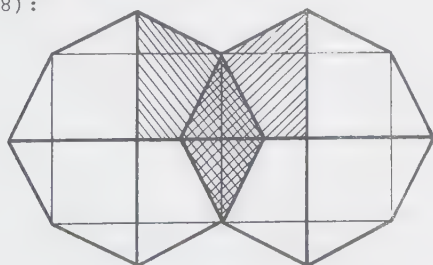


Fig. 18

Die Maschen des Gitters sind die Vierecke mit orthogonalen Diagonalen im Verhältnis 4:3 bzw. 1:3. (In Fig. 18 ist jedes Viereck mit gleicher Schraffur eine Masche.)

Bemerkung 2: Liegt eine vergleichsweise noch einfache Einteilung in kongruente Rhomben vor, so kann K bereits nicht mehr so einfach angegeben werden. Ohne Beweis sei hier erwähnt, dass sich K aus der Gleichung

$$K^2(-3+3\cos 2\alpha) + K2\operatorname{tg}\alpha - (-2+3\cos 2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha) = 0$$

berechnet. Mit α ist dabei der Winkel zwischen einer Rhombuseite und der kürzeren Diagonalen bezeichnet. Für $\alpha = 45^\circ$ erhält man wie oben $K = -\frac{1}{3}$ und $K = 1$. Letzteres muss jedoch ausser Betracht fallen, denn ein Gitter R, dessen Maschen orthogonale Diagonalen gleicher Länge besitzen, wurde schon in [6] und [12] behandelt und führt auf die Formel (1.8), nicht aber auf (4.3').

Die Erweiterung eines Gitters R_p , welches durch die Eckpunkte einer beliebigen Parallelogrammeinteilung definiert wird, zu einem Gitter R ist äusserst schwierig und verlangt, im Gegensatz zur Triangulierung, in jedem Element eine komplizierte Berechnung der Diagonalenverhältnisse. ■

5 DIE KONSTRUKTION VON KONFORMEN ABBILDUNGEN MITTELS ℓ -DISKRET-HOLOMORPHEN FUNKTIONEN

5.1 Grundlagen und Problemstellung

Es seien G und B zwei endliche, einfach zusammenhängende Gebiete mit stückweise stetig differenzierbarem Rand C bzw. D , die konform aufeinander abgebildet werden sollen. Die Existenz und die Eindeutigkeit einer solchen Abbildung wird garantiert durch den *Riemann'schen Abbildungssatz* [10]

Satz 5.1: Es existiert eine Funktion $\zeta = f(z)$, die in G regulär ist und die eine konforme eindeutige Abbildung von G auf B vermittelt. Dabei kann man vorschreiben, dass ein in G gegebener Punkt z_0 in einen willkürlich gegebenen Punkt ζ_0 und eine in z_0 gewählte Richtung in eine vorgegebene Richtung in ζ_0 übergeht.

Da C eine stückweise stetig differenzierbare Kurve (eine Jordankurve) ist, lässt sich die konforme Abbildung zwischen G und B stetig auf den Rand fortsetzen [15], S.179-181). Daher ist die Eindeutigkeit von $f(z)$ auch dann gewährleistet, wenn drei beliebig gewählte Punkte von C in drei vorgegebene Punkte von D übergehen [20]. Das bedeutet, dass für drei Randpunkte drei reelle Parameter frei wählbar sind.

Ist die Randabbildung $\phi: C \longrightarrow D$ bekannt, so lässt sich $f: G \longrightarrow B$ entweder darstellen als Cauchy'sche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\phi(s)}{s-z} ds \quad s \in C$$

oder auch als Lösung der elliptischen RWPe (Dirichletprobleme)

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G$$

mit der Randbedingung

$$u = \operatorname{Re}(\phi(s)) \quad \text{auf } C,$$

und

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } G$$

mit der Randbedingung

$$v = \operatorname{Im}(\phi(s)) \quad \text{auf } C.$$

Die Berechnung der Randabbildung $\phi: C \longrightarrow D$ erfolgt in zwei Etappen, nämlich

1. Konstruktion von $\phi_1: C \longrightarrow \partial K$, wobei K der Einheitskreis ist, mittels einer Integralgleichung von Lichtenstein/Gersgorin [9] und
2. Konstruktion von $\phi_2: \partial K \longrightarrow D$ mittels einer Integralgleichung von Theodorson [9].

Um die Lösung von Integralgleichungen zu vermeiden, wollen wir annehmen, dass das Gebiet B ein Rechteck mit den Ecken

$$\alpha = \xi_0 + i\eta_0,$$

$$\beta = \xi_1 + i\eta_0,$$

$$\gamma = \xi_1 + i\eta_1,$$

$$\delta = \xi_0 + i\eta_1,$$

sei und dass die gesuchte Abbildung $f: G \cup C \longrightarrow B \cup D$ die vier im positiven Umlaufsinn aufeinanderfolgenden, sonst beliebig gewählten Punkte P_a , P_b , P_c und P_d auf C in die Ecken α , β , γ und δ abbildet (s.Fig. 19). Da jedoch nur drei reelle Parameter für eine konforme Abbildung vorgegeben werden können, müssen wir zulassen, dass η_1 nicht fest ist. Das bedeutet, dass das Seitenverhältnis von B nicht vorgegeben werden kann.

Sei C_{ab} das offene Teilstück von C , das von P_a und P_b begrenzt wird; die restlichen Teilstücke von C seien analog bezeichnet.

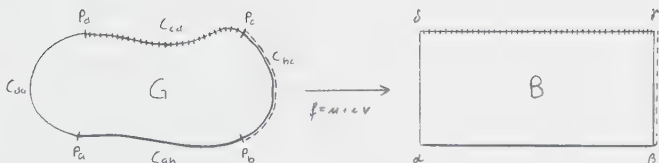


Fig. 19

Die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Abbildung wurde bereits in [12] gezeigt.

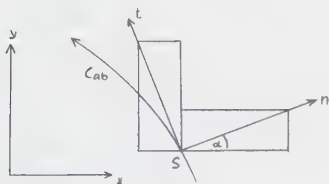


Fig. 20

Da B ein Rechteck ist, dessen Seiten parallel zu der x- bzw. y-Achse liegen, gilt für $s \in C_{ab}$

$$v(s) = \eta_0,$$

woraus für die Ableitung von v in Richtung der Tangente folgt (s. Fig. 20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos(90^\circ + \alpha) + \frac{\partial v}{\partial y} \sin(90^\circ + \alpha) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y} \cos(90^\circ + \alpha) + \frac{\partial u}{\partial x} \sin(90^\circ + \alpha) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha = \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \end{aligned}$$

Ebenso gilt $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf C_{cd} , so dass der Realteil der gesuchten konformen Abbildung die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- RWP I.1 $\Delta u = 0$ in G
- RWP I.2 $u = \xi_0$ auf $C_{da} \cup \{p_a, p_d\}$
- RWP I.3 $u = \xi_1$ auf $C_{bc} \cup \{p_b, p_c\}$
- RWP I.4 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf $C_1 := C_{ab} \cup C_{cd}$.

Analog erfüllt der Imaginärteil v der gesuchten Abbildung die Eigenschaften

$$\text{RWP II.1} \quad \Delta v = 0 \quad \text{in } G$$

$$\text{RWP II.2} \quad v = \eta_0 \quad \text{auf } C_{ab} \cup \{P_a, P_b\}$$

$$\text{RWP II.3} \quad v = \eta_1 \quad \text{auf } C_{cd} \cup \{P_c, P_d\}$$

$$\text{RWP II.4} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } C_2 := C_{da} \cup C_{bc} ,$$

wobei η_1 jedoch unbekannt ist.

Statt des Dirichletproblems mit einer Randabbildung ϕ liegt nun, da B als Rechteck gewählt wurde, ein eindeutig lösbares gemischtes RWP vor. Die Bedingungen RWP I.2-4 und RWP II.2-4 ergeben sich aus der besonderen Form von B. Der Quotient

$$m(G) := \frac{\eta_1 - \eta_0}{\xi_1 - \xi_0} ,$$

dessen Bestimmung mit Differenzenmethoden in [8] behandelt wird, heisst *konformer Modul* von G. Zur Berechnung von $m(G)$ werden ℓ -diskret-holomorphe Funktionen verwendet.

5.2 Die Konstruktion der ℓ -diskret-holomorphen Funktion für die Abbildung auf ein Rechteck

Das in Abschn. 5.1 formulierte RWP I soll mit Hilfe der FEM gelöst werden. Dazu triangulieren wir das Gebiet G derart, dass alle vorkommenden Winkel $\leq 90^\circ$ sind und der Rand C von G möglichst gut durch einen Polygonzug, gebildet aus Dreiecksseiten der Triangulierung, approximiert wird. Der Einfachheit halber soll das Polygon, welches C approximiert, wieder mit C bezeichnet werden. Die Knotenpunkte dieser Triangulierung bilden ein Gitter R_1 . Mit Hilfe des linearen Ansatzes der FEM lösen wir in R_1 das RWP I.

Das Gitter R_1 erweitern wir gemäss Abschn. 3.1 unter Hinzunahme der Umkreismittelpunkte Q_i und der Mittelpunkte Q_j' derjenigen Seiten, welche C bilden, zu einem Gitter R.

Da C_{ab} auf die Gerade $\widehat{ab}$ abgebildet werden soll, muss für ein ganz bestimmtes $Q'_{j_0} \in R_2 \cap C_{ab}$ gelten

$$v(Q'_{j_0}) = \eta_0.$$

Mit diesem Ausgangswert berechnen wir nach Satz 3.4 $v(R_2)$ eindeutig, und es gilt der

Satz 5.2: Auf den Randstücken C_{ab} und C_{cd} gilt

$$\begin{aligned} v(Q'_j) &= \text{const.} & \forall Q'_j \in R_2 \cap C_{ab}, \\ v(Q'_i) &= \text{const.} & \forall Q'_i \in R_2 \cap C_{cd}. \end{aligned}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde der Beweis mit den Bezeichnungen der Fig. 21 geführt, welche mit

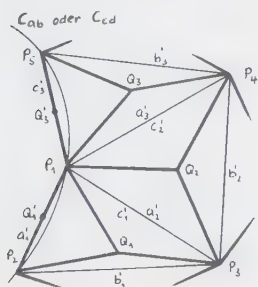


Fig. 21

Ausnahme der Q'_1 und Q'_j mit denen in Fig. 7 übereinstimmen. Dabei sind $Q'_1 \in R_2$ und $Q'_3 \in R_2$ zwei benachbarte, auf C_{ab} (oder C_{cd}) liegende Punkte und P_1 die gemeinsame, auch auf C_{ab} (bzw. C_{cd}) liegende Ecke der zu Q'_1 und Q'_3 gehörenden Dreiecke T_1 und T_3 . Es gilt hier nach (3.6) und (3.7), entsprechend angewandt,

$$\begin{aligned} v(Q'_1) - v(Q'_3) &= [v(Q'_1) - v(Q_1)] + [v(Q_1) - v(Q_2)] + \\ &\quad [v(Q_2) - v(Q_3)] + [v(Q_3) - v(Q'_3)] \\ &= \left| \frac{Q'_1 - Q_1}{P_2 - P_1} \right| (u_1 - u_2) + \left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_3 - P_1} \right| (u_1 - u_3) + \\ &\quad \left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_4 - P_1} \right| (u_1 - u_4) + \left| \frac{Q_3 - Q'_3}{P_5 - P_1} \right| (u_1 - u_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} (u_1 - u_2) + \left(\frac{b_2'^2 + c_2'^2 - a_2'^2}{4J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} \right) (u_1 - u_3) + \\
 &\quad \left(\frac{b_3'^2 + c_3'^2 - a_3'^2}{4J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) (u_1 - u_4) + \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{4J_3} (u_1 - u_5) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \frac{b_i'^2}{2J_i} u_1 - \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} u_2 - \left(\frac{b_2'^2 + c_2'^2 - a_2'^2}{4J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} \right) u_3 \\
 &\quad \left(\frac{b_3'^2 - a_3'^2 + c_3'^2}{4J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) u_4 - \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{4J_3} u_5 = 0.
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus (2.9). Damit ergibt sich für die zwei benachbarten Punkte $v(Q_1') = v(Q_3')$. Für $Q_j' \in R_2 \cap C_{ab}$ gilt somit in der Tat

$$v(Q_j') = \eta_0,$$

währendem für alle $Q_i' \in R_2 \cap C_{cd}$

$$v(Q_i') = \bar{\eta}_1$$

resultiert, wo $\bar{\eta}_1$ der Wert ist, der für $v(Q_1')$ mittels (3.6) aus $u(R_1)$ und $v(Q_{j_0}')$, $Q_{j_0}' \in R_2 \cap C_{ab}$, errechnet wurde.

■

Bemerkung: Um Satz 5.1 zu beweisen, ist es wesentlich, dass die Näherungsgleichung für $\Delta u = 0$ nicht mittels Differenzen aufgestellt wird, sondern sich aus der notwendigen Bedingung des Stationärwerdens des Integrals

$$I_G(u) = \iint_G \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

ergibt, wobei $u(x,y)$ in einem Element der Einteilung von G eine bestimmte Form besitzen muss.

Als Beispiel wollen wir annehmen, $u(R_1)$ werde durch das Differenzenverfahren (1.8) berechnet, wobei am Rand C_{ab} von G die

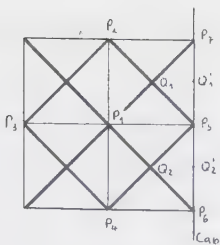


Fig. 22

$$\text{Randbedingung } \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(s. Fig. 22) mit

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} = -3u_5 + 4u_1 - u_3 \quad (5.1)$$

[21] approximiert wird. Nach (3.6) gilt

$$\begin{aligned} v(Q_2') - v(Q_1') &= [v(Q_2') - v(Q_2)] + [v(Q_2) - v(Q_1)] + [v(Q_1) - v(Q_1')] \\ &= \frac{1}{2}(u_6 - u_5) + (u_1 - u_5) + \frac{1}{2}(u_7 - u_5) . \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck entspricht aber nicht dem diskreten Ausdruck für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x}$, d.h. der rechten Seite von (5.1).

Hier liegt auch eine der Schwierigkeiten für eine Anwendung der genaueren Mehrstellenformeln, die aus Taylorentwicklungen von $u(x,y)$ in verschiedene Richtungen mit Abbrechen nach einem bestimmten Glied gewonnen wurden [4]. Auf eine Mehrstellenformel soll in Kap. 7 eingegangen werden.

Nun setzen wir

$$v(P_j) := \eta_0 \quad \forall P_j \in R_1 \cap C_{ab}$$

$$\text{und} \quad v(P_i) := \bar{\eta}_1 \quad \forall P_i \in R_1 \cap C_{cd}$$

und sind damit in der Lage, RWP II zu lösen. Mit Hilfe von Satz 3.4 und einem Ausgangspunkt

$$u(Q_{i_0}') = \xi_0, \quad Q_{i_0}' \in R_2 \cap C_{da},$$

können wir $u(R_2)$ eindeutig berechnen, und es gilt der zu Satz 5.2 analoge

Satz 5.3: Auf den Randstücken C_{da} und C_{bc} gilt

$$\begin{aligned} u(Q'_i) &= \text{const.} & \forall Q'_i \in R_2 \cap C_{da} , \\ u(Q'_j) &= \text{const.} & \forall Q'_j \in R_2 \cap C_{bc} . \end{aligned}$$

Der Wert von $u(Q'_j)$ wird allerdings nicht mit ξ_1 übereinstimmen, jedoch wird gezeigt werden (Kap. 6), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(Q'_j^{(n)}) = \xi_1 , \quad \forall Q'_j^{(n)} \in R_2^{(n)} \cap C_{cd} ,$$

wenn $R^{(n)}$ ein immer feiner werdendes Gitter und $R_2^{(n)} := (R^{(n)})_2$ bedeutet.

5.3 Praktische Probleme

Es besteht die prinzipielle Möglichkeit, dass eine Masche von R durch die Abbildung, wie sie gemäss Abschn. 5.2 konstruiert wurde, in ein degeneriertes Viereck mit orthogonalen Diagonalen übergeht:



Fig. 23

Die Fortsetzung einer solchen Gitterfunktion in die Maschen hinein ist natürlich nicht mehr eindeutig.

Ein im praktischen Sinne befriedigenderes Resultat erhalten wir, wenn wir nur $f(R_1)$ betrachten und diese Gitterfunktion mittels des verwendeten Ansatzes der FEM in die Elemente hinein fortsetzen.

5.4 Ein Beispiel

Es sei G ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck, das wir konform in ein Rechteck abbilden wollen. Die drei Ecken und der Mittelpunkt der Hypothenuse sollen in die vier Eckpunkte des Rechteckes abgebildet werden.

Das Urbild mit der Elemententeilung und das Bild von G sind in Fig. 24 dargestellt. Diejenigen Kanten, deren Bild im Rechteck eingezeichnet sind, sind in G ausgezogen gezeichnet, die übrigen Kanten gestrichelt. Dort wo grosse Verzerrungen zu erwarten sind, wird G feiner unterteilt.

Bei einer Unterteilung von G gemäss Fig. 24 erhalten wir für den Modul die Näherung

$$\overline{m}(G) = 1.017271,$$

während für den exakten Modul aus Symmetriegründen

$$m(G) = 1$$

gilt.

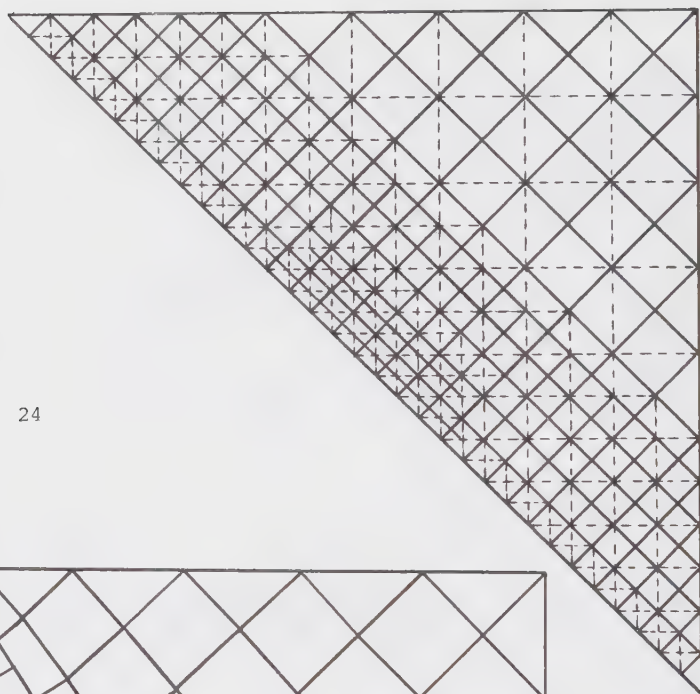
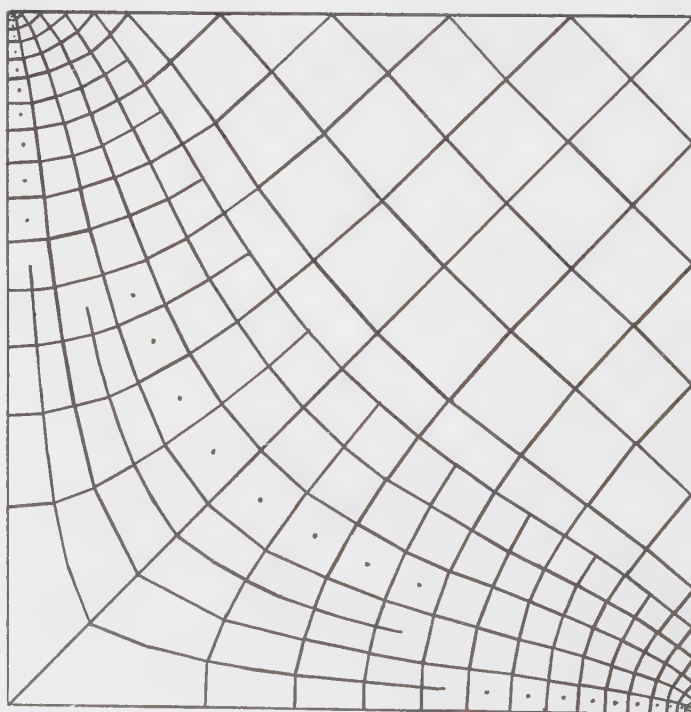


Fig. 24



6 KONVERGENZBETRACHTUNG FÜR DEN LINEAREN FALL

6.1 Voraussetzungen und Bezeichnungen

Es sei G ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise stetig differenzierbarem Rand $C = C_{ab} \cup C_{bc} \cup C_{cd} \cup C_{da} \cup \{P_a, P_b, P_c, P_d\}$, das konform auf das Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ mit unbekanntem Seitenverhältnis abgebildet werden soll, so dass gilt

$$\begin{aligned} f(P_a) &= \alpha = \xi_0 + i\eta_0 \\ f(P_b) &= \beta = \xi_1 + i\eta_0 \\ \operatorname{Re}(f(P_c)) &= \operatorname{Re}(\gamma) = \xi_1 \\ \operatorname{Re}(f(P_d)) &= \operatorname{Re}(\delta) = \xi_0. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung seien $\xi_0 = \eta_0 = 0$ und $\xi_1 = 1$.

Es sei eine Folge von Triangulierungen in G derart gegeben, dass für die grösste vorkommende Seite $h^{(n)}$ der n -ten Triangulierung gilt $h^{(n)} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Die Mengen

$$R_1^{(n)} := \{P_i = (x_i, y_i) / P_i = \text{Eckpunkt der } n\text{-ten Triangulierung}\}$$

definieren eine Folge von Gittern. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $R_2^{(n)}$ das zu $R_1^{(n)}$ konjugierte Gitter, und auf $R^{(n)} := R_1^{(n)} \cup R_2^{(n)}$ bzw. auf $R_1^{(n)}$ sei die nach Abschn. 5.2 konstruierte Gitterfunktion

$$f^{(n)}: R^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}$$

und

$$f_1^{(n)}: R_1^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } f_1^{(n)}(P_i) = f^{(n)}(P_i) \quad \forall P_i \in R_1^{(n)}$$

definiert.

Es sei $G^{(n)} := \bigcup_i T_i^{(n)}$ das polygonale Gebiet, welches G approximiert. Der Rand von $G^{(n)}$ sei mit $C^{(n)}$ bezeichnet. Die lineare

Fortsetzung von $f_1^{(n)}$ in die Maschen $T_i^{(n)}$ von $R_1^{(n)}$ sei

$$f_1^{(n)} = u^{(n)} + i v^{(n)} : G^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Ist G nicht polygonal, so definieren wir $f_1^{(n)}$ in $G \setminus G^{(n)}$, indem wir $f_1^{(n)}$ von den Randdreiecken über die C approximierenden Seiten bis zum Rand C fortsetzen. Der Einfachheit halber sei jedoch angenommen, dass $G \subset G^{(n)}$.

Wir wollen zeigen, dass $f_1^{(n)}$ gegen die eindeutige konforme Abbildung

$$f = u + i v : G \longrightarrow B,$$

deren Existenz und Eindeutigkeit durch den Riemann'schen Abbildungssatz garantiert wird, konvergiert.

Dazu betrachten wir G als Gebiet in der xy -Ebene und den Raum $L_2(G)$ aller in G quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \phi, \psi \rangle = \iint_G \phi(x, y) \psi(x, y) dx dy$$

und der Norm

$$\|\phi\|_0 = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}.$$

Als *Sobolev-Raum* $H^m(G)$ bezeichnen wir den Vektorraum der Funktionen von $L_2(G)$, deren Ableitungen bis zur Ordnung m ebenfalls zu $L_2(G)$ gehören. Für unsere Betrachtungen werden wir folgende Klassen von Funktionen benutzen:

$$H_1^1(G) := \{ \phi_1 \in H^1(G) / \phi_1(C_{da} \cup \{P_d, P_a\}) = 0, \phi_1(C_{bc} \cup \{P_c, P_b\}) = 1 \}$$

$$H_2^1(G) := \{ \phi_2 \in H^1(G) / \phi_2(C_{da} \cup C_{bc} \cup \{P_a, P_b, P_c, P_d\}) = 0 \}$$

$$S^{(n)} := \left\{ \phi^{(n)} \in H^1(G) / \phi^{(n)} \text{ in jedem Dreieck der } n\text{-ten Triangulierung linear} \right\}$$

$$S_1^{(n)} := \{ \phi_1^{(n)} \in S^{(n)} / \phi_1^{(n)}(C_{da}^{(n)} \cup \{P_d, P_a\}) = 0, \phi_1^{(n)}(C_{bc}^{(n)} \cup \{P_b, P_c\}) = 1 \}$$

$$S_2^{(n)} := \{ \phi_2^{(n)} \in S^{(n)} / \phi_2^{(n)}(C_{da}^{(n)} \cup C_{bc}^{(n)} \cup \{P_a, P_b, P_c, P_d\}) = 0 \}.$$

In $H^m(G)$ sind [23]

$$|\phi|_r := \left\{ \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = r} \iint_G \left| \frac{\partial^r \phi}{\partial^{\alpha_1} x \partial^{\alpha_2} y} \right|^2 dx dy \right\}^{1/2}, \quad 0 \leq r \leq m,$$

Seminormen und

$$\|\phi\|_m := \{ |\phi|_0^2 + |\phi|_1^2 + \dots + |\phi|_m^2 \}^{1/2}$$

eine Norm.

Das Bestimmen der Lösung von RWP I:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } G \\ u &= 0 && \text{auf } C_{da} \cup \{P_d, P_a\} \\ u &= 1 && \text{auf } C_{bc} \cup \{P_b, P_c\} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } C_1 = C_{ab} \cup C_{cd} \end{aligned}$$

ist äquivalent damit, in $H_1^1(G)$ eine Funktion u zu finden derart, dass für alle $\phi_2 \in H_2^1(G)$ gilt

$$\langle u, \phi_2 \rangle_1 := \iint_G \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right] dx dy = 0. \quad (6.1)$$

Dabei ist $\langle, \rangle_1$ ein Produkt, das alle Eigenschaften des Skalarproduktes ausser der positiven Definitheit besitzt. Entsprechend ist die Bestimmung einer Näherungslösung $u^{(n)} \in S_1^{(n)}$ von RWP I damit äquivalent, eine Funktion $u^{(n)} \in S_1^{(n)}$ zu finden derart, dass für alle $\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}$ gilt

$$\langle u^{(n)}, \phi_2^{(n)} \rangle_1 = 0. \quad (6.2)$$

Da in (6.2) über G integriert wird, entspricht $u^{(n)}$ bei krummlinigem Rand nicht der FEM-Lösung $u_0^{(n)}$, denn für $u_0^{(n)}$ gilt

$$\langle \phi_2^{(n)}, \phi_2^{(n)} \rangle_{1, G^{(n)}} = 0 \quad \forall \phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}.$$

Hier deutet der Index $G^{(n)}$ an, dass nicht über G , sondern über das polygonale Gebiet $G^{(n)}$ integriert wird.

Für das folgende wird vorausgesetzt, dass für die Lösung von RWP I gilt

$$\|u\|_2 < \infty.$$

Weiter werden noch einige Aussagen zusammengestellt, die im Konvergenzbeweis benötigt werden.

Satz 6.1: Für stetige Funktionen $\phi_2 \in H_2^1(G)$ existiert eine Zahl $\mu > 0$ derart, dass

$$|\phi_2|_1^2 > \mu \|\phi_2\|_0^2. \quad (6.3)$$

Beweis: Sei G ein Gebiet mit zwei Randstücken C_{ab} und C_{cd} , auf denen die stetigen Funktionen $\phi_2 \in H_2^1(G)$ frei sind.

In Fig. 25 sind C_{ab} und C_{cd} dick ausgezogen gezeichnet. Die La-

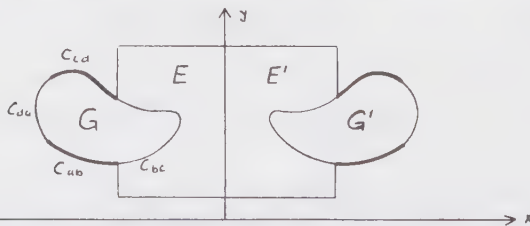


Fig. 25

ge der y-Achse darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit gemäss Fig. 25 angenommen werden, da mit einer Koordinatentransformation immer erreicht werden kann, dass sie ausserhalb von G zu liegen kommt. Sei $\psi \neq 0$ eine beliebige stetige Funktion aus $H_2^1(G)$.

Nun erweitern wir G um die Gebiete E , E' und G' gemäss Fig. 25, wobei $G' \cup E'$ symmetrisch zu $G \cup E$ liegen soll. ψ setzen wir

stetig nach $\bar{E}$ und $\bar{E}'$ fort, indem wir

$$\psi(\overline{E \cup E'}) = 0$$

setzen. In $\bar{G}'$ setzen wir

$$\psi(x, y) = -\psi(-x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{G}'.$$

In $\Omega = \overline{G \cup E \cup E' \cup G'}$ gilt die Ungleichung von Poincaré [13]:

$$\iint_{\Omega} \psi^2 dx dy \leq A \iint_{\Omega} (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy + B \left(\iint_{\Omega} \psi dx dy \right)^2$$

mit Konstanten $A > 0$ und $B > 0$. Da ψ in $E \cup E'$ Null ist und in den spiegelsymmetrischen Gebieten G und G' entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, verschwindet der letzte Term obiger Ungleichung, und es folgt weiter

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \psi^2 dx dy &= \iint_G \psi^2 dx dy + \iint_{G'} \psi^2 dx dy = 2 \iint_G \psi^2 dx dy \\ &\leq A \iint_{\Omega} (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy \\ &= A \left[\iint_G (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy + \iint_{G'} (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy \right] \\ &= 2 A \iint_G (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Dass (6.3) nicht nur für Funktionen aus $H_2^1(G)$, sondern auch für Funktionen aus $S_2^{(n)} \not\subset H_2^1(G)$ richtig ist, beweisen wir in

Satz 6.2: Für stetige Funktionen $\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}$ existiert eine Zahl $\mu > 0$ derart, dass

$$|\phi_2^{(n)}|_1^2 > \mu \|\phi_2^{(n)}\|_0^2. \quad (6.3')$$

Beweis: Es sei $\tilde{G}$ das Gebiet, das durch $C_{ab} \cup C_{bc}^{(n)} \cup C_{cd} \cup C_{da}^{(n)}$ begrenzt wird und ψ sei eine beliebige Funktion aus $S_2^{(n)}$. Seien $E_i \subset T_i$ die zu den Grenzdreiecken $T_i \subset \tilde{G}$ gehörenden "Zweiecke". Da ψ in T_i linear ist und die Triangulierung genü-

gend fein vorausgesetzt wird, gilt für jedes "Zweieck" E_i

$$|\psi|_{1,E_i}^2 \leq |\psi|_{1,T_i \setminus E_i}^2$$

und für $E =: \bigcup_i E_i$

$$|\psi|_{1,E}^2 \leq \sum_i |\psi|_{1,T_i \setminus E_i}^2 \leq |\psi|_{1,\tilde{G} \setminus E}^2.$$

Somit ist wegen $G \subset \tilde{G}$ und nach Satz 6.1

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{2} \|\psi\|_{0,G}^2 &\leq \frac{\mu'}{2} \|\psi\|_{0,\tilde{G}}^2 \leq \frac{1}{2} |\psi|_{1,\tilde{G}}^2 \\ (6.3) \\ &= \frac{1}{2} |\psi|_{1,\tilde{G} \setminus E}^2 + \frac{1}{2} |\psi|_{1,E}^2 \leq |\psi|_{1,\tilde{G} \setminus E}^2 \end{aligned}$$

Mit $\mu := \frac{\mu'}{2}$ ergibt sich die Behauptung. ■

Aus Satz 6.1 und Satz 6.2 folgt das

Korollar 6.3: Für stetige Funktionen $\phi_2 \in H_2^1(G)$ bzw. $\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}$ existiert eine Zahl $\gamma > 0$ derart, dass

$$|\phi_2|_1^2 > \gamma \|\phi_2\|_1^2 \quad (6.4)$$

$$\text{bzw.} \quad |\phi_2^{(n)}|_1^2 > \gamma \|\phi_2^{(n)}\|_1^2.$$

Definition 1.1: Funktionen, für die eine Zahl $\gamma > 0$ existiert, so dass sie (6.4) erfüllen, genügen einer Koerzivitätsbedingung.

Nun beweisen wir noch zwei Lemmas. Dabei wollen wir hier und im folgenden, da keine Missverständnisse auftreten können, "h" an Stelle von " $h^{(n)}$ " schreiben.

Lemma 6.4: Für Funktionen $\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}$ gilt

$$\sup_{\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}} \frac{\left\{ \int_{C_2} (\phi_2^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2}}{\|\phi_2^{(n)}\|_1} \leq kh^{3/2}. \quad (6.5)$$

Beweis:

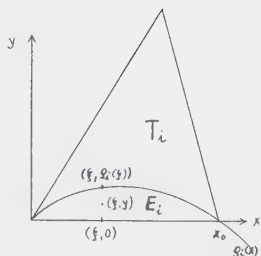


Fig. 26

Wir betrachten ein Grenzdreieck T_i mit dem zugehörigen "Zweieck" E_i und setzen $\bar{T}_i := T_i \setminus E_i$. Wir nehmen an, dass die Elemententeilung so fein sei, dass für alle $\bar{T}_i$ Funktionen $\rho_i(x)$ existieren mit folgenden Eigenschaften:

1. $\{ (x, \rho_i(x)) / 0 \leq x \leq x_0 \} = \bar{T}_i \cap C_2$
2. $\forall i, \sup_{0 \leq x \leq x_0} |\rho_i(x)| \leq k_1 x_0^2, \sup_{0 \leq x \leq x_0} |\rho_i'(x)| \leq k_2 x_0^2$.

Sei $\psi \in S_2^{(n)}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{0, \bar{T}_i \cap C_2}^2 &= \int_0^{x_0} [\psi(x, \rho_i(x))]^2 \cdot \sqrt{1 + [\rho_i'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^{x_0} [\psi(x, \rho_i(x)) - \psi(x, 0)]^2 \cdot \sqrt{1 + [\rho_i'(x)]^2} dx \\ &= x_0 [\psi(\xi, \rho_i(\xi)) - \psi(\xi, 0)]^2 \cdot \sqrt{1 + [\rho_i'(\xi)]^2} \\ &= x_0 [\psi_y(\xi, y)]^2 [\rho_i(\xi)]^2 \cdot \sqrt{1 + [\rho_i'(\xi)]^2} \\ &\leq k_3 x_0^5 [\psi_y(\xi, y)]^2 \end{aligned}$$

Nach [19] erfüllt ein beliebiges Polynom P die Ungleichungen

$$\sup_{T_i} |p_Y| \leq \sup_{\bar{K}_{T_i}} |p_Y| \leq k_4 \bar{r}_{T_i}^{-1} \|p\|_{1, \bar{K}_{T_i}} \leq k_4 \frac{2}{x_0} \|p\|_{1, \bar{T}_i} ,$$

wenn $\bar{K}_{T_i}$ den Umkreis von T_i mit Radius $\bar{r}_{T_i}$ und $\bar{K}_{T_i}$ den grössten Kreis bezeichnet, welcher in T_i und $\bar{T}_i$ enthalten ist. Daher gilt insbesondere

$$[\psi_Y(\xi, Y)]^2 \leq \sup_{T_i} |\psi_Y|^2 \leq k_4^2 \frac{4}{x_0^2} \|\psi\|_{1, \bar{T}_i}^2 .$$

Diese Ungleichung oben eingesetzt, ergibt

$$\|\psi\|_{0, \bar{T}_i \cap C_2}^2 \leq k_5 x_0^3 \|\psi\|_{1, \bar{T}_i}^2 .$$

Integriert man über alle Randstücke $\bar{T}_i \cap C_2$ von C_2 , so resultiert

$$\int_{C_2} \psi^2 ds = \sum_i \int_{\bar{T}_i \cap C_2} \psi^2 ds \leq k_5 h^3 \sum_i \|\psi\|_{1, \bar{T}_i}^2 \leq kh^3 \|\psi\|_1^2 ,$$

woraus unmittelbar (6.5) folgt.

■

Lemma 6.5: Sei w eine stetige Funktion aus $H_1^2(G)$ und $w_I \in S_1^{(n)}$ sei ihre Interpolierende. Dann gilt

$$\|w - w_I\|_{0, C_2} \leq kh^2 \|w\|_2 . \quad (6.6)$$

Beweis: Da w auf $\bar{T}_i \cap C_2$ konstant ist und $w(\bar{T}_i \cap C_2) = w_I(T_i \cap C_2^{(n)})$, gilt (s. Fig. 26)

$$\begin{aligned} \int_{\bar{T}_i \cap C_2} (w - w_I)^2 ds &= \int_0^{x_0} [(w - w_I)(x, \rho_i(x))]^2 \sqrt{1 + [\rho_i'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^{x_0} [w_I(x, 0) - w_I(x, \rho_i(x))]^2 \sqrt{1 + [\rho_i'(x)]^2} dx . \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 6.4 schätzt man den letzten Term wie folgt ab:

$$\int_0^{x_0} [w_I(x, 0) - w_I(x, \rho_i(x))]^2 \cdot \sqrt{1 + [\rho_i'(x)]^2} \, dx \leq k_1 h^3 \|w_I\|_{1, \bar{T}_i},$$

so dass

$$\int_{\bar{T}_i \cap C_2} (w - w_I)^2 \, ds \leq k_1 h^3 \|w_I\|_{1, \bar{T}_i}^2$$

resultiert. Integriert man über alle Randstücke $\bar{T}_i \cap C_2$ von C_2 , so wird

$$\int_{C_2} (w - w_I)^2 \, ds = \sum_i \int_{\bar{T}_i \cap C_2} (w - w_I)^2 \, ds \leq k_2 h^3 \sum_i \|w_I\|_{1, \bar{T}_i}^2.$$

Weiter ist [19]

$$\sum_i \|w_I\|_{1, \bar{T}_i}^2 \leq k_3 h \|w\|_2^2, \quad (6.7)$$

so dass

$$\|w - w_I\|_{0, C_2} \leq k_4 h^2 \|w\|_2.$$

Bemerkung: Lemma 6.4 kann [19] auch für stetige Funktionen aus $H^2(G)$ bewiesen werden. Die Abschätzung lautet dann

$$\|w - w_I\|_{0, C_2} \leq kh^2 (\|w\|_2 + \|w\|_{2, C_2}).$$

Für uns genügt jedoch die einfachere Formel (6.6).

6.2 Die Konvergenz von $u^{(n)}$ gegen u

Verschiedene Konstanten, die in diesem Abschnitt in Abschätzungen auftreten, sollen im folgenden generell mit k und k_1, k_2 , usw. bezeichnet werden. Dabei soll k und k_i , $i=1, 2, \dots$, kein bestimmter Zahlwert zugedacht werden.

Satz 6.6: Für die Näherungslösung $\bar{u}^{(n)}$ von u , welche (6.2) erfüllt, gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - \bar{u}^{(n)}\|_1 \leq kh \|u\|_2, \quad (6.8)$$

wobei $k = k(G, R_1^{(n)}, \gamma)$.

Beweis: Nach der Dreiecksungleichung gilt für den Fehler $u - \bar{u}^{(n)}$

$$\|u - \bar{u}^{(n)}\|_1 \leq \|u - \phi_1^{(n)}\|_1 + \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1, \quad (6.9)$$

wobei $\phi_1^{(n)}$ beliebig sein darf. Für den zweiten Term in der rechten Seite von (6.9) erhalten wir eine Abschätzung wie folgt:

$$\begin{aligned} \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1^2 &= \langle \phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}, \phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)} \rangle_1 \\ &= \langle \phi_1^{(n)} - u, \phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)} \rangle_1 + \langle u - \bar{u}^{(n)}, \phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)} \rangle_1 \\ &\leq \|\phi_1^{(n)} - u\|_1 \cdot \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1 + \langle u - \bar{u}^{(n)}, \phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)} \rangle_1. \end{aligned}$$

Da $\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)} \in S_2^{(n)}$ nach Korollar 6.3 eine Koerzivitätsbedingung $\|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1^2 > \gamma \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1^2$ erfüllt, folgt

$$\gamma \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1^2 \leq \|\phi_1^{(n)} - u\|_1 \cdot \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1 + \langle u - \bar{u}^{(n)}, \phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)} \rangle_1.$$

Division durch $\gamma \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1$ ergibt dann

$$\begin{aligned} \|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1 &\leq \frac{1}{\gamma} \|\phi_1^{(n)} - u\|_1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\langle u - \bar{u}^{(n)}, \phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)} \rangle_1}{\|\phi_1^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1} \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \|\phi_1^{(n)} - u\|_1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \sup_{\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}} \frac{\langle u - \bar{u}^{(n)}, \phi_2^{(n)} \rangle_1}{\|\phi_2^{(n)}\|_1}. \end{aligned}$$

Setzen wir das in (6.9) ein und wählen speziell $\phi_1^{(n)} = u_I$, wobei wir mit $u_I \in S_1^{(n)}$ die Interpolierende von u bezeichnen, so resultiert

$$\|u - u^{*(n)}\|_1 \leq (1 + \frac{1}{\gamma}) \|u - u_I\|_1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \sup_{\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}} \frac{\langle u - u^{*(n)}, \phi_2^{(n)} \rangle_1}{\|\phi_2^{(n)}\|_1} \quad (6.10)$$

Benützen wir (6.2) und die Green'sche Formel, so ergibt sich für den Zähler des letzten Termes von (6.10)

$$\langle u - u^{*(n)}, \phi_2^{(n)} \rangle_1 = \langle u, \phi_2^{(n)} \rangle_1 = \langle \phi_2^{(n)}, u \rangle_1 = \langle \phi_2^{(n)}, -\Delta u \rangle + \oint_C \phi_2^{(n)} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Da jedoch $-\Delta u = 0$ und $\frac{\partial u(s)}{\partial n} = 0$ auf $C_1 = C_{ab} \cup C_{cd}$, gilt

$$\begin{aligned} \langle u - u^{*(n)}, \phi_2^{(n)} \rangle_1 &= \int_{C_2} \phi_2^{(n)} \frac{\partial u}{\partial n} ds \leq \left\{ \int_{C_2} (\phi_2^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_{C_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 ds \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_{C_2} (\phi_2^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{0,C} \leq \left\{ \int_{C_2} (\phi_2^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \|u\|_{1,C} \\ &\leq k_1 \left\{ \int_{C_2} (\phi_2^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \|u\|_2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus dem Spurentheorem [7]:

$$\|u\|_{1,C} \leq k_1 \|u\|_2. \quad (6.12)$$

Setzen wir (6.11) in (6.10), erhalten wir

$$\|u - \bar{u}^{*(n)}\|_1 \leq (1 + \frac{1}{\gamma}) \|u - u_I\|_1 + \frac{k_1 \|u\|_2}{\gamma} \sup_{\phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}} \frac{\{ \int (\phi_2^{(n)})^2 ds \}^{1/2}}{\|\phi_2^{(n)}\|_1} .$$

Der erste Term rechts ist der Fehler, der durch die Approximation der Lösung u durch $u_I \in S_1^{(n)}$ entsteht. Der zweite Term berücksichtigt den Fehler, der gemacht wird, wenn Randwerte auf einem Polygon anstatt auf C angenommen werden. Benützen wir dafür Lemma 6.4, so wird

$$\|u - \bar{u}^{*(n)}\|_1 \leq (1 + \frac{1}{\gamma}) \|u - u_I\|_1 + \frac{k_2}{\gamma} \|u\|_2 h^{3/2} .$$

Da für den ersten Term dieser Ungleichung [19]

$$\|u - u_I\|_1 \leq k_3 h \|u\|_2 , \quad (6.13)$$

folgt (6.8). ■

Satz 6.7: Für die Näherungslösung $\bar{u}^{(n)} \in S_1^{(n)}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - \bar{u}^{(n)}\|_1 \leq kh \|u\|_2 . \quad (6.14)$$

Beweis: Wir wenden die Dreiecksungleichung an:

$$\|u - \bar{u}^{(n)}\|_1 \leq \|u - \bar{u}^{*(n)}\|_1 + \|\bar{u}^{*(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1 .$$

Der erste Term erfüllt eine Ungleichung der Art (6.14) nach Satz 6.6. Für den zweiten Term gilt, wenn man $G \subset G^{(n)}$ berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{*(n)} - \bar{u}^{(n)}\|_1^2 &= \|\omega\|_1^2 = \iint_G (\omega^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2) dx dy \\ &\leq \iint_{G^{(n)}} (\omega^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2) dx dy \leq \frac{1}{\gamma} |\omega|_{1,G^{(n)}}^2 . \end{aligned}$$

Da sich die Ausführungen in [22], S. 197-199 auf $\omega = \overset{*}{u}^{(n)} - \overset{0}{u}^{(n)}$ übertragen lassen und auch richtig sind, wenn $G \subset G^{(n)}$, gilt

$$\frac{1}{\gamma} |\omega|_{1,G}^2 = \frac{1}{\gamma} |\overset{*}{u}^{(n)} - \overset{0}{u}^{(n)}|_{1,G}^2 \leq k_1 (h^2 + A\sigma) ,$$

wobei A als Fläche von $G^{(n)} \setminus G = O(h^2)$ und (vgl. Fig. 26)

$$\sigma = \min_i \left(\frac{\text{Fläche } E_i}{\text{Fläche } T_i} \right) = O(h) .$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\gamma} |\omega|_{1,G}^2 \leq \frac{k_1}{\|u\|_2^2} \|u\|_2^2 \cdot h^2 = kh^2 \|u\|_2^2 .$$

Satz 6.8: In der $L_2(G)$ -Norm erfüllt $u - \overset{0}{u}^{(n)}$ die Ungleichung

$$\|u - \overset{0}{u}^{(n)}\|_0 \leq kh^2 \|u\|_2 . \quad (6.15)$$

Beweis: Wir setzen $e := u - \overset{0}{u}^{(n)}$ und betrachten das folgende RWP:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta w &= e && \text{in } G \\ w &= 0 && \text{auf } C_2 := C_{da} \cup C_{bc} \cup \{P_a, P_b, P_c, P_d\} \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 && \text{auf } C_1 := C_{ab} \cup C_{cd} . \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Sei $\|w\|_2 < \infty$. Die Anwendung der Green'schen Formel ergibt

$$\begin{aligned} \|e\|_0^2 &= \langle e, -\Delta w \rangle = \langle e, w \rangle_1 - \oint_C e \frac{\partial w}{\partial n} ds \\ &= \langle e, w - w_I \rangle_1 + \langle e, w_I \rangle_1 - \oint_C e \frac{\partial w}{\partial n} ds \\ &= \langle e, w - w_I \rangle_1 + \langle u, w_I \rangle_1 - \langle \overset{0}{u}^{(n)}, w_I \rangle_1 - \oint_C e \frac{\partial w}{\partial n} ds . \end{aligned}$$

Wenden wir für $\langle u, w_I \rangle_1 = \langle w_I, u \rangle_1$ nochmals die Green'sche Formel an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|e\|_0^2 &= \langle e, w - w_I \rangle_1 - \langle \bar{u}^{(n)}, w_I \rangle_1 - \oint_C e \frac{\partial w}{\partial n} ds + \oint_C w_I \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &\leq |\langle e, w - w_I \rangle_1| + |\langle \bar{u}^{(n)}, w_I \rangle_1| + \left| \oint_C e \frac{\partial w}{\partial n} ds \right| + \left| \oint_C w_I \frac{\partial u}{\partial n} ds \right|. \quad (6.17) \end{aligned}$$

In (6.17) schätzen wir zuerst den letzten Term ab: Berücksichtigen wir, dass $\frac{\partial u(s)}{\partial n} = 0$ auf C_1 und $w(s) = 0$ auf C_2 und wenden die Schwarz'sche Ungleichung und Lemma 6.5 an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \oint_C w_I \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| &= \left| \int_{C_2} (w - w_I) \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \leq \left\{ \int_{C_2} (w - w_I)^2 ds \right\}^{1/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{0,C} \\ &\leq k_1 h^2 \|w\|_2 \|u\|_{1,C}. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Spurensatz (6.12) erhält man

$$\left| \oint_C w_I \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \leq k_2 h^2 \|w\|_2 \|u\|_2. \quad (6.18)$$

Nun folgt eine Abschätzung des dritten Termes von (6.17):

$$\begin{aligned} \left| \oint_C e \frac{\partial w}{\partial n} ds \right| &= \left| \int_{C_2} e \frac{\partial w}{\partial n} ds \right| \leq \left\{ \int_{C_2} e^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_{C_2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 ds \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_{C_2} e^2 ds \right\}^{1/2} \left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{0,C} \leq \left\{ \int_{C_2} e^2 ds \right\}^{1/2} \|w\|_{1,C} \\ &\leq k_3 \left\{ \int_{C_2} (u - u_I + u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \|w\|_2 \\ (6.12) \quad &\leq k_3 \left[\left\{ \int_{C_2} (u - u_I)^2 ds \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{C_2} (u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \right] \|w\|_2 \\ &= k_3 \left[\|u - u_I\|_{0,C_2} + \left\{ \int_{C_2} (u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \right] \|w\|_2. \quad (6.19) \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.5 ist

$$\|u - u_I\|_{0, C_2} \leq k_4 h^2 \|u\|_2, \quad (6.20)$$

während für den zweiten Summanden von (6.19) wegen der Abschätzungen (6.5), (6.13) und (6.14) gilt

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{C_2} (u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} &\leq k_5 h^{3/2} \|u_I - \bar{u}^{(n)}\|_1 \\ &\leq k_5 h^{3/2} (\|u - u_I\|_1 + \|\bar{u}^{(n)}\|_1) \\ &\leq k_6 h^{5/2} \|u\|_2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

(6.20) und (6.21) in (6.19) gesetzt, ergibt

$$\left| \oint_C e^{\frac{\partial w}{\partial n} ds} \right| \leq k_7 h^2 \|u\|_2 \|w\|_2. \quad (6.22)$$

Der zweite Term reduziert sich, da $\bar{u}^{(n)}$ die zu (6.2) analoge Gleichung $\langle \bar{u}^{(n)}, \phi_2^{(n)} \rangle_{1, G^{(n)}} = 0 \quad \forall \phi_2^{(n)} \in S_2^{(n)}$ erfüllt, zu

$$\begin{aligned} |\langle \bar{u}^{(n)}, w_I \rangle_1| &= |\langle \bar{u}^{(n)}, w_I \rangle_{1, G^{(n)}} - \langle \bar{u}^{(n)}, w_I \rangle_{1, G^{(n)} \setminus G}| \\ &= |\langle \bar{u}^{(n)}, w_I \rangle_{1, G^{(n)} \setminus G}| \leq \|\bar{u}^{(n)}\|_{1, G^{(n)} \setminus G} \cdot \|w_I\|_{1, G^{(n)} \setminus G}. \end{aligned}$$

Da $\bar{u}^{(n)} \in S_1^{(n)}$ und $w_I \in S_2^{(n)}$, genügen die beiden Funktionen dem Lemma von Berger [22], das auch im Fall $G \subset G^{(n)}$ gültig bleibt:

$$\begin{aligned} \iint_{T_i \setminus \bar{T}_i} [(\bar{u}^{(n)})^2 + (\bar{u}_x^{(n)})^2 + (\bar{u}_y^{(n)})^2] dx dy \\ \leq k_8 \sigma \iint_{T_i} [(\bar{u}^{(n)})^2 + (\bar{u}_x^{(n)})^2 + (\bar{u}_y^{(n)})^2] dx dy \end{aligned}$$

$$= k_8^\sigma \left\{ \iint_{T_i \setminus \bar{T}_i} [(\bar{u}^{(n)})^2 + (u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2] dx dy \right. \\ \left. + \iint_{\bar{T}_i} [(\bar{u}^{(n)})^2 + (u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2] dx dy \right\}$$

mit $\sigma = \min_i \left\{ \frac{\text{Fläche } T_i \setminus \bar{T}_i}{\text{Fläche } T_i} \right\} = O(h)$. Daraus folgt

$$\iint_{T_i \setminus \bar{T}_i} [(\bar{u}^{(n)})^2 + (u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2] dx dy \quad (6.23) \\ \leq \frac{k_8^\sigma}{1 - k_8^\sigma} \iint_{\bar{T}_i} [(\bar{u}^{(n)})^2 + (u_x^{(n)})^2 + (u_y^{(n)})^2] dx dy$$

mit $\frac{k_8^\sigma}{1 - k_8^\sigma} = O(h)$, bzw., über alle Randdreiecke summiert,

$$\|\bar{u}^{(n)}\|_{1,G(n) \setminus G} \leq k_9 h^{1/2} \|\bar{u}^{(n)}\|_{1, \cup \bar{T}_i} \\ \leq k_9 h^{1/2} (\|\bar{u}^{(n)} - u\|_{1, \cup \bar{T}_i} + \|u - u_I\|_{1, \cup \bar{T}_i} + \|u_I\|_{1, \cup \bar{T}_i}) \\ \leq k_{10} h^{1/2} (\|\bar{u}^{(n)} - u\|_1 + \|u - u_I\|_1 + h^{1/2} \|u\|_2) \leq k_{11} h \|u\|_2. \quad (6.13) \\ (6.7) \quad (6.14)$$

Mit (6.23) und (6.7) ergibt sich ebenso

$$\|w_I\|_{1,G(n) \setminus G} \leq k_{11} h \|w\|_2,$$

so dass

$$|\langle \bar{u}^{(n)}, w_I \rangle_1| \leq k_{12} h^2 \|u\|_2 \|w\|_2. \quad (6.24)$$

Für den ersten Term von (6.17) gilt

$$|\langle e, w - w_I \rangle_1| \leq \|e\|_1 \|w - w_I\|_1,$$

wobei [19]

$$\|w - w_I\|_1 \leq k_{13} h \|w\|_2$$

und nach (6.14)

$$\|e\|_1 \leq k_{14} h \|u\|_2 .$$

Daraus folgt

$$|\langle e, w - w_I \rangle_1| \leq k_{15} h^2 \|u\|_2 \|w\|_2 . \quad (6.25)$$

(6.18), (6.22), (6.24) und (6.25) in (6.17) gesetzt, ergibt

$$\|e\|_0^2 \leq k_{16} h^2 \|u\|_2 \|w\|_2 . \quad (6.26)$$

Da $\|w\|_2 < \infty$ vorausgesetzt ist, existieren Zahlen k_{17}, k_{18}, k_{19} , unabhängig von e [11], [7], so dass

$$\|w\|_2 \leq k_{17} \|e\|_0 + k_{18} \|w\|_0 \leq k_{19} \|e\|_0 . \quad (6.27)$$

Setzen wir das in (6.26) ein und dividieren durch $\|e\|_0$, ergibt sich die Behauptung. ■

6.3 Der konforme Modul

Um die Aussage von Satz 6.7 und Satz 6.8 auch für die Funktion $\varphi^{(n)} = \text{Im}(f_1^{(n)})$ zu beweisen, ist die Kenntnis des konformen Moduls

$$m(G) = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\xi_1 - \xi_0} = \eta_1$$

notwendig. $m(G)$ kann jedoch nur näherungsweise berechnet werden. Wir werden jedoch zeigen, dass für $n \rightarrow \infty$

$$\overline{m}(G^{(n)}) := \eta_1^{(n)} \rightarrow m(G) = \eta_1 ,$$

wenn

$$\eta_1^{(n)} := v^{(n)}(Q_1^{(n)}) \quad \forall Q_1^{(n)} \in C_{cd}^{(n)} .$$

Wir benützen dazu eine Eigenschaft von $m(G)$, die in [8] bewiesen ist:

Satz 6.9: Der konforme Modul $m(G)$ ist gleich dem Dirichletintegral der Lösung von RWP I:

$$m(G) = |u|_1^2 = 2I_G(u). \quad (6.28)$$

Wir zeigen nun, dass Satz 6.9 ein Analogon für diskrete Funktionen besitzt.

Satz 6.10: Der Modul $\bar{m}(G^{(n)})$ ist gleich dem Dirichletintegral der FEM - Lösung $u^{(n)}$ von RWP I über $G^{(n)}$:

$$\bar{m}(G^{(n)}) = |u^{(n)}|_{1,G^{(n)}}^2 = 2I_{G^{(n)}}(u^{(n)}). \quad (6.29)$$

Beweis: Zum Beweis folgen wir der Idee aus [17], S.287-288. Der Einfachheit halber soll, wo keine Missverständnisse auftreten können, auf den Index n verzichtet werden.

Sei Γ ein beliebiger Polygonzug auf den Maschenseiten von R_2 , der von einem Punkt $Q'_0 \in R_2 \cap C_{ab}^{(n)}$ nach $Q'_m \in R_2 \cap C_{cd}^{(n)}$ führt. Da nach Satz 3.4 die Werte $v(Q_i)$ und $v(Q'_i) \forall Q_i \in R_2$ und $\forall Q'_i \in R_2 \cap (C_{ab}^{(n)} \cup C_{cd}^{(n)})$ eindeutig bestimmt sind und

$$\begin{aligned} v(Q'_j) &= 0 & \forall Q'_j \in R_2 \cap C_{ab}^{(n)}, \\ v(Q'_i) &= \text{const.} = \eta_1^{(n)} & \forall Q'_i \in R_2 \cap C_{cd}^{(n)}, \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \eta_1^{(n)} &= \bar{m}(G^{(n)}) = v(Q'_m) - v(Q'_0) \\ &= v(Q'_m) - v(Q_m) + \sum_{i=0}^{m-1} [v(Q_{i+1}) - v(Q_i)] + v(Q_0) - v(Q'_0) \end{aligned}$$

mit $Q_i \in \Gamma, i=0, \dots, m,$
und $Q'_m \in \Gamma, Q'_0 \in \Gamma,$

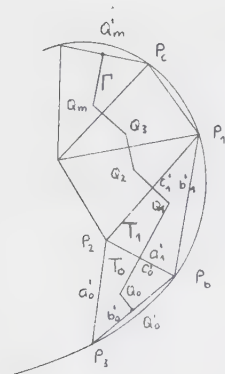


Fig. 27

konstant für alle Γ , die von $C_{ab}^{(n)}$ nach $C_{cd}^{(n)}$ führen. Daher genügt es, den speziellen Polygonzug zu betrachten, der entlang C_{bc} führt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei G in der Nähe von C_{bc} gemäss Fig.27 trianguliert. Für die beiden letzten Summanden von $\bar{m}(G^{(n)})$ gilt nach (3.6) und Lemma 3.2

$$\begin{aligned} v(Q_0) - v(Q'_0) &= \frac{a_o'^2 + c_o'^2 - b_o'^2}{4J_o} (u_b - u_3) = \frac{a_o'^2 + c_o'^2 - b_o'^2}{4J_o} (1 - u_3) \\ v(Q_1) - v(Q_0) &= \left(\frac{a_o'^2 + b_o'^2 - c_o'^2}{4J_o} + \frac{c_1'^2 + b_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} \right) (u_b - u_2) \\ &= \left(\frac{a_o'^2 + b_o'^2 - c_o'^2}{4J_o} + \frac{c_1'^2 + b_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} \right) (1 - u_2) . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Analog werden die restlichen Summanden von $\bar{m}(G^{(n)})$ ausgedrückt.

Auf der andern Seite betrachten wir die quadratische Form

$$2I_{G^{(n)}}(\underline{u}^{(n)}) = 2[\frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{A} \underline{u} + \underline{b}^T \underline{u} + d].$$

Da $u_i = u(P_i) = 0 \quad \forall P_i \in R_1 \cap C_{da}^{(n)}$, stammen die Beiträge zum linearen und konstanten Term von $2I_{G^{(n)}}(\underline{u}^{(n)})$ alle von den Dreiecken, welche $C_{bc}^{(n)}$ berühren. Für die Dreiecke T_0 und T_1 sind nach (2.3) und (2.4)

$$\begin{aligned} 2I_{T_0}(\underline{u}^{(n)}) &= \frac{1}{2}[(a_o + 2b_o + c_o)u_2^2 - 2(c_o + b_o)u_3u_2 - \\ &\quad 2(a_o + b_o)u_bu_2 + c_o u_3^2 + 2b_o u_bu_3 + a_o u_b^2] \end{aligned}$$

$$2I_{T_1}(u^{(n)}) = \frac{1}{2}[(a_1+2b_1+c_1)u_2^2 - 2(c_1+b_1)u_b u_2 - 2(a_1+b_1)u_1 u_2 + c_1 u_b^2 + 2b_1 u_1 u_b + a_1 u_1^2] .$$

Betrachtet man jetzt hier speziell nur die linearen und konstanten Terme und berücksichtigt dazu (2.6), so erhält man als Beitrag von T_0 und T_1 zu $\underline{b}^T \underline{u} + d$ ($u_b = u_1 = 1$)

$$\begin{aligned} & \frac{b_o'^2 - a_o'^2 - c_o'^2}{2J_o} u_3 - \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{2J_1} u_2 - \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} u_2 \\ & - \frac{b_o'^2 + a_o'^2 - c_o'^2}{2J_1} u_2 + \frac{a_o'^2}{2J_o} + \frac{b_1'^2}{2J_1} . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Denkt man sich (6.30) und (6.31) für alle Summanden von $\bar{m}(G^{(n)})$ bzw. für alle $2I_{T_i}(u^{(n)})$, $i=0, \dots, m$, ausgeschrieben, so stellt man fest, dass die konstanten Terme in (6.30) und (6.31) gleich sind, während die linearen Terme in (6.31) um einen Faktor 2 grösser sind. Da in (6.30) keine quadratischen Terme vorkommen, gilt

$$2I_{G^{(n)}}(u^{(n)}) - \bar{m}(G^{(n)}) = 2\left[\frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{A} \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{b}^T \underline{u}\right] = 0 .$$

Die letzte Gleichheit besteht wegen $\underline{A} \underline{u} + \underline{b} = 0$.

Nun kann die Konvergenz von $\bar{m}(G^{(n)})$ gezeigt werden:

Satz 6.11: Der diskrete konforme Modul $\bar{m}(G^{(n)})$ konvergiert gegen $m(G)$ und es gilt

$$|\bar{m}(G^{(n)}) - m(G)| \leq kh^2 \|\underline{u}\|_2^2 . \quad (6.32)$$

Beweis: Da wegen $G \subset G^{(n)}$

$$\bar{m}(G^{(n)}) > \bar{m}(G) > m(G) > 0 ,$$

gilt

$$\bar{m}(G^{(n)}) - m(G) = [\bar{m}(G^{(n)}) - \bar{m}(G)] + [\bar{m}(G) - m(G)] . \quad (6.33)$$

Der erste Term genügt dem Lemma von Berger:

$$\begin{aligned} \bar{m}(G^{(n)}) - \bar{m}(G) &= \left| \bar{u}^{(n)} \right|_{1,G}^2 - \left| \bar{u}^{(n)} \right|_{1,\bar{T}_i}^2 = \sum_i \left| \bar{u}^{(n)} \right|_{1,T_i \setminus \bar{T}_i}^2 \\ &\leq \sum_i \left\| \bar{u}^{(n)} \right\|_{1,T_i \setminus \bar{T}_i}^2 \leq k_1 h \sum_i \left\| \bar{u}^{(n)} \right\|_{1,\bar{T}_i}^2 \\ &\leq k_1 h \sum_i \left(\left\| \bar{u}^{(n)} - u \right\|_{1,\bar{T}_i}^2 + \left\| u - u_I \right\|_{1,\bar{T}_i}^2 + \left\| u_I \right\|_{1,\bar{T}_i}^2 \right) . \end{aligned}$$

Mit

$$\sum_i \left\| \bar{u}^{(n)} - u \right\|_{1,\bar{T}_i}^2 \leq \left\| \bar{u}^{(n)} - u \right\|_1^2 \leq k_2 h^2 \left\| u \right\|_2^2, \quad (6.14)$$

$$\sum_i \left\| u - u_I \right\|_{1,\bar{T}_i}^2 \leq \left\| u - u_I \right\|_1^2 \leq k_2 h^2 \left\| u \right\|_2^2 \quad (6.13)$$

und (6.7) ergibt sich

$$\bar{m}(G^{(n)}) - \bar{m}(G) \leq k_3 h^2 \left\| u \right\|_2^2 . \quad (6.34)$$

Den zweiten Term der rechten Seite von (6.33) wandeln wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} \bar{m}(G) - m(G) &= \left| \bar{u}^{(n)} \right|_1^2 - \left| u \right|_1^2 \\ &= \langle \bar{u}^{(n)}, \bar{u}^{(n)} \rangle_1 - \langle u, u \rangle_1 = \langle \bar{u}^{(n)}, \bar{u}^{(n)} \rangle_1 + \langle u, \bar{u}^{(n)} \rangle_1 \\ &= \langle \bar{u}^{(n)} - u, \bar{u}^{(n)} \rangle_1 + \langle \bar{u}^{(n)} - u, u \rangle_1 \\ &\leq \langle \bar{u}^{(n)} - u, \bar{u}^{(n)} - u \rangle_1 + 2 \left| \langle \bar{u}^{(n)} - u, u \rangle_1 \right| . \quad (6.35) \end{aligned}$$

Wir setzen $e := u - \bar{u}^{(n)}$ und formen den letzten Term mit der Green'schen Formel um:

$$|\langle e, u \rangle_1| = |\langle e, -\Delta u \rangle + \oint_C e \frac{\partial u}{\partial n} ds| \quad .$$

Da $\Delta u = 0$ und $\frac{\partial u(s)}{\partial n} = 0$ auf $C_1 = C_{ab} \cup C_{cd}$, gilt

$$|\langle e, u \rangle_1| \leq \left| \int_{C_2} e \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \quad .$$

Diesen letzten Ausdruck, der bei polygonalem Rand gleich Null ist, schätzen wir wie den dritten Term der rechten Seite von (6.17) ab, nämlich

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} e \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| &\leq \left\{ \int_{C_2} e^2 ds \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{C_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 ds \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_{C_2} e^2 ds \right\}^{1/2} \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{0,C} \\ &\leq k_4 \left\{ \int_{C_2} (u - u_I + u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \cdot \|u\|_2 \\ (6.12) \quad &\leq k_4 \left[\left\{ \int_{C_2} (u - u_I)^2 ds \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{C_2} (u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \right] \|u\|_2 \\ &= k_4 \left[\|u - u_I\|_{0,C_2} + \left\{ \int_{C_2} (u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} \right] \|u\|_2 \quad . \end{aligned}$$

Für $\|u - u_I\|_{0,C_2}$ gilt nach (6.6)

$$\|u - u_I\|_{0,C_2} \leq k_5 h^2 \|u\|_2 \quad ,$$

während für den andern Term wegen (6.5), (6.13) und (6.14) gilt

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{C_2} (u_I - \bar{u}^{(n)})^2 ds \right\}^{1/2} &\leq k_6 h^{3/2} \|u_I - \bar{u}^{(n)}\|_1 \\ &\leq k_6 h^{3/2} (\|u - u_I\|_1 + \|u - \bar{u}^{(n)}\|_1) \\ &\leq k_7 h^{5/2} \|u\|_2 \quad . \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$\left| \int_{C_2} e^{\frac{\partial u}{\partial n}} ds \right| \leq k_8 h^2 \|u\|_2 \quad (6.36)$$

Für $\langle u^{(n)} - u, u^{(n)} - u \rangle_1 = \|u^{(n)} - u\|_1^2$ in (6.35) gilt mit (6.14)

$$\|u^{(n)} - u\|_1^2 \leq \|u^{(n)} - u\|_1^2 \leq k_9 h^2 \|u\|_2^2. \quad (6.37)$$

Setzen wir (6.36) und (6.37) in (6.35) und berücksichtigen (6.34), so folgt die Behauptung. ■

Beispiel: Das in Fig. 28 dick berandete Gebiet werde auf ein Rechteck abgebildet. Die eingezeichnete Triangulierung werde durch Halbierung der Dreiecksseiten noch zweimal verfeinert.

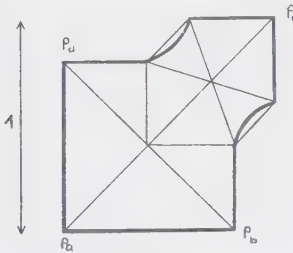


Fig. 28

Aus Symmetriegründen beträgt der konforme Modul

$$m(G) = 1.$$

Die Näherung $\bar{m}(G^{(n)})$ des konformen Moduls ergibt für verschiedene Maschenweiten:

n	$h^{(n)}$	$\bar{m}(G^{(n)})$
1	4/5	1.021562
2	2/5	1.006798
3	1/5	1.001967

Die Konvergenz ist noch nicht von der Ordnung $O(h^2)$. Der Grund liegt darin, dass in $C_{bc}^{(n)}$ und $C_{cd}^{(n)}$ Winkel auftreten, die mehr als 180° betragen. Bei einer Verfeinerung streben diese Winkel jedoch gegen 180° und die Konvergenzordnung gegen $O(h^2)$ (vgl. Abschn. 6.5).

6.4 Die Konvergenz von $\underline{v}^{(n)}$ gegen v

Satz 6.12: Neben $\|u\|_2 < \infty$ gelte auch $\|v\|_2 < \infty$. Dann wird

$$\|v - \underline{v}^{(n)}\|_0 \leq kh^2 \|v\|_2 (\|u\|_2^2 + 1) . \quad (6.38)$$

Beweis: Sei $\underline{v}^{*(n)}$ die FEM-Lösung mit in den Dreiecken der n -ten Triangulierung linearen Ansätzen, die man bei Kenntnis von η_1 erhält. Die Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$\|v - \underline{v}^{(n)}\|_0 \leq \|v - \underline{v}^{*(n)}\|_0 + \|\underline{v}^{*(n)} - \underline{v}^{(n)}\|_0 . \quad (6.39)$$

Wir behandeln zuerst den zweiten Term: Da nur auf $R_1 \cap C_{cd}^{(n)}$ Randwerte $\underline{v}^{*(n)}(R_1 \cap C_{cd}^{(n)}) = \eta_1 \neq 0$ vorgegeben sind, ist der Vektor $\underline{v}^{*(n)} = (v_1^{*(n)}, \dots, v_k^{*(n)})^T$ Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$A \underline{v}^{*(n)} = \underline{l} \eta_1 ,$$

wobei sich A aus den Steifigkeitsmatrizen der Elemente der Triangulierung aufbaut und $\underline{l}$ durch die Geometrie der Randdreiecke gegeben ist. Es gilt daher

$$\underline{v}^{*(n)} = A^{-1} \underline{l} \eta_1 . \quad (6.40)$$

Entsprechend ist $\underline{v}^{(n)}$ Lösung eines Gleichungssystems

$$A \underline{v}^{(n)} = \underline{l} \eta_1^{(n)}$$

mit demselben A und $\underline{l}$, gegeben durch die Triangulierung, d.h.

$$\underline{v}^{(n)} = A^{-1} \underline{l} \eta_1^{(n)} . \quad (6.41)$$

Schreiben wir

$$\eta_1^{(n)} = \eta_1 (1 + \epsilon) \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{\eta_1^{(n)} - \eta_1}{\eta_1} ,$$

so ergibt sich aus (6.40) und (6.41)

$$\begin{aligned}\underline{\overset{\circ}{v}}^{(n)} - \underline{v}^{*(n)} &= A^{-1} \underline{l} (\eta_1^{(n)} - \eta_1) \\ &= A^{-1} \underline{l} \eta_1 \epsilon = \underline{v}^{*(n)} \epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{und } \|\underline{\overset{\circ}{v}}^{(n)} - \underline{v}^{*(n)}\|_0^2 &= \iint_G (\underline{\overset{\circ}{v}}^{(n)} - \underline{v}^{*(n)})^2 dx dy \\ &= \iint_G (\underline{v}^{*(n)})^2 \epsilon^2 dx dy \\ &= \epsilon^2 \|\underline{v}^{*(n)}\|_0^2 \leq \epsilon^2 \|\underline{v}^{*(n)} - \underline{v}\|_0^2 + \epsilon^2 \|\underline{v}\|_0^2. \quad (6.42)\end{aligned}$$

Für $\epsilon = \frac{\eta_1^{(n)} - \eta_1}{\eta_1}$ resultiert nach Satz 6.11

$$\epsilon^2 \leq k_1 h^4 \|u\|_2^4,$$

und nach Satz 6.8, entsprechend auf die Lösung $\underline{v}^{*(n)}$ von RWP II angewandt, ist

$$\|\underline{v}^{*(n)} - \underline{v}\|_0^2 \leq k_2 h^4 \|\underline{v}\|_2^2. \quad (6.43)$$

Der erste Term von (6.42) konvergiert mit h^8 gegen Null, so dass wir nur den zweiten beachten müssen. Da nach Voraussetzung $\|\underline{v}\|_2 < \infty$, existiert ein k_3 mit $\|\underline{v}\|_0 = k_3 \|\underline{v}\|_2$, und (6.42) genügt somit der Abschätzung

$$\|\underline{\overset{\circ}{v}}^{(n)} - \underline{v}^{*(n)}\|_0 \leq k_4 h^2 \|u\|_2^2 \|\underline{v}\|_2.$$

Der erste Term der rechten Seite von (6.39) erfüllt die Ungleichung (6.43), womit (6.38) gezeigt ist. ■

6.5 Die Konvergenz von $\mathcal{O}^{(n)}$ beim Auftreten von Singularitäten

An Punkten, wo der Rand C von G Ecken besitzt (d.h. nicht differenzierbar ist) und in den Punkten P_a, P_b, P_c, P_d , welche in die Ecken des Rechteckes B abgebildet werden, treten unter Umständen Singularitäten auf [8],[14],[22], welche die Existenz von $\|u\|_2 < \infty$ in Frage stellen. Wir wollen u in genügend kleinen Umgebungen U_1 der möglichen Singularitätsstellen etwas näher untersuchen.

1. Es sei $A \in C_2 = C_{da} \cup C_{bc}$ eine Ecke mit dem Innenwinkel π/δ_1 , und $U_1 \subset G \subset \mathbb{C}$ sei eine sektorielle Umgebung von A . Das Spiegelungsprinzip liefert in U_1 für f [8]

$$\begin{aligned} f(r, \theta) = f(z) &= A_0 + A_1 z^{\delta_1} + A_2 z^{2\delta_1} + \dots \\ &= A_0 + A_1 r^{\delta_1} (\cos \delta_1 \theta + i \sin \delta_1 \theta) + A_2 r^{2\delta_1} (\cos 2\delta_1 \theta + i \sin 2\delta_1 \theta) + \dots \end{aligned}$$

mit $0 \leq \theta \leq \pi/\delta_1$, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ und $A_j = \alpha_j - i\beta_j \in \mathbb{C}$.

Für den Realteil $u(r, \theta)$ von $f(z) = f(r, \theta)$ gilt dann

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \alpha_0 + \alpha_1 r^{\delta_1} \cos \delta_1 \theta + \beta_1 r^{\delta_1} \sin \delta_1 \theta \\ &\quad + \alpha_2 r^{2\delta_1} \cos 2\delta_1 \theta + \beta_2 r^{2\delta_1} \sin 2\delta_1 \theta + \dots \end{aligned}$$

Nun berücksichtigen wir, dass $u(r, 0) = 0$ falls $A \in C_{da}$ bzw. $u(r, 0) = 1$ falls $A \in C_{bc}$:

$$u(r, 0) = \alpha_0 + \alpha_1 r^{\delta_1} + \alpha_2 r^{2\delta_1} + \dots = 0 \quad A \in C_{da}$$

$$u(r, 0) = \alpha_0 + \alpha_1 r^{\delta_1} + \alpha_2 r^{2\delta_1} + \dots = 1 \quad A \in C_{bc}.$$

Da dieses Polynom in r^{δ_1} Null bzw. 1 ist für alle r , sind die Koeffizienten $\alpha_i = 0 \quad \forall i > 0$ und $\alpha_0 = 0$ bzw. 1. Daher wird

$$u(r, \theta) = \alpha_0 + \beta_1 r^{\delta_1} \sin \delta_1 \theta + \beta_2 r^{2\delta_1} \sin 2\delta_1 \theta + \dots$$

Aus dieser Darstellung von $u(r, \theta)$ ist ersichtlich, dass für $\frac{1}{\delta_1} > 1$, d.h. bei einem Innenwinkel von über 180° , $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0}$ nicht mehr existiert. Verwenden wir jedoch gebrochene Sobolev-Normen $\|\cdot\|_{\sigma, U_1}$ [2] , so existiert zumindest

$$\|u\|_{1+\gamma_1, U_1} < \infty, \quad \gamma_1 < \delta_1.$$

Ist $A \in C_1 = C_{ab} \cup C_{cd}$, dann wird wegen $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$

$$u(r, \theta) = \alpha_0 + \alpha_1 r^{\delta_1} \cos \delta_1 \theta + \alpha_2 r^{2\delta_1} \cos 2\delta_1 \theta + \dots$$

und es existiert wiederum

$$\|u\|_{1+\gamma_1, U_1} < \infty, \quad \gamma_1 < \delta_1.$$

2. Es sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A = P_d$, π/δ_2 der Innenwinkel der Ecke A und U_2 eine genügend kleine sektorielle Umgebung von A. Für diesen Punkt gilt [8]

$$f(r, \theta) = f(z) = A_{-1} + A_0 z^{\delta_2/2} + A_1 z^{\delta_2/2 + \delta_2} + A_2 z^{\delta_2/2 + 2\delta_2} + \dots$$

und für den Realteil

$$u(r, \theta) = \beta_0 r^{\delta_2/2} \sin(\delta_2/2) \theta + \beta_1 r^{\delta_2/2 + \delta_2} \sin(\delta_2/2 + \delta_2) \theta + \dots,$$

und es folgt

$$\|u\|_{1+\gamma_2, U_2} < \infty, \quad \gamma_2 < \delta_2/2.$$

In $G \setminus \bigcup_i U_i$, U_i Umgebung einer Singularitätsstelle, existiert

$\|u\|_{2, G \setminus \bigcup_i U_i}$, so dass

$$\|u\|_{\sigma} < \infty, \quad \sigma \leq 1 + \gamma_i, \quad \forall i.$$

Für die Konvergenz von $\bar{u}^{(n)}$ gegen u in der Norm $\|\cdot\|_1$ folgt dann [22]

$$\|u - \bar{u}^{(n)}\|_1 = O(h^{(\sigma-1)}) = O(h^{\min \gamma_i}) , \quad \gamma_i < \delta_i .$$

Für den Fehler in der $L_2(G)$ -Norm gilt, falls $\sigma < 2$ [22]

$$\|u - \bar{u}^{(n)}\|_0 \leq kh^{2(\sigma-1)} \|u\|_{\sigma}, \quad \sigma \leq 1 + \gamma_i \quad \forall i .$$

Beispiel:

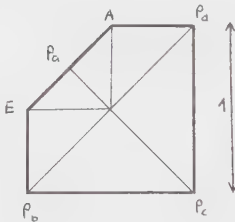


Fig. 29

G sei das in Fig. 29 dargestellte Gebiet. Durch dreimalige Halbierung der Dreiecksseiten wird die Triangulierung verfeinert.

In einer Umgebung U_1 von A bzw. U_2 von E gilt wegen $\delta = 4/3$

$$\|u\|_{\sigma, U_i} < \infty, \quad \sigma < 1 + 4/3, \quad i = 1, 2,$$

während in einer Umgebung U_3 von P_a wegen $\delta = 1$

$$\|u\|_{\sigma, U_3} < \infty, \quad \sigma < 1 + 1/2 .$$

Daher gilt für $\bar{u}^{(n)}$

$$\|u - \bar{u}^{(n)}\|_1^2 = O(h^{2\gamma}), \quad \gamma < 1/2 ,$$

d.h. in der $\|\cdot\|_1$ -Norm liegt beinahe eine lineare Konvergenz vor. Für den konformen Modul erhält man bei dreimaliger Halbierung der Dreiecksseiten der vorgegebenen Triangulierung:

n	$h^{(n)}$	$\bar{m}(G)$
1	1	1.108696
2	1/2	1.058258
3	1/4	1.029499
4	1/8	1.014780

Die theoretisch vorausgesagte Konvergenz wird bestätigt.

7 DISKRETE HOLOMORPHIE BEI EINER MEHRSTELLENFORMEL

Wie in Kap. 4 sei R_P das Gitter, welches sich aus der speziellen Parallelogrammeinteilung in Quadrate ergibt, und es sei

$$R_1 := R_P \cup \{\text{Quadratmittelpunkte}\}.$$

Wählen wir jetzt $K = \frac{1}{3}$, so schreibt sich (4.7) als

$$\frac{20f_1 - 4(f_2 + f_4 + f_6 + f_8) - f_3 - f_5 - f_7 - f_9}{6} = 0. \quad (7.1)$$

Die linke Seite von (7.1) ist die *Neunpunkteformel*, eine Mehrstellenformel, die sich z.B. in [4],[5] und [11] findet. Das Korollar 3.5 lässt sich dem Sinne nach leicht auf (7.1) anwenden:

Seien $\underline{u}$ und $\underline{v}$ zwei reelle Gitterfunktionen, welche im Innern des Gitters $R_P \subset R_1$ (7.1) erfüllen. Der Funktionswert $f(Q_0) = \underline{u}(Q_0) + i\underline{v}(Q_0)$ eines beliebigen Punktes $Q_0 \in R_2$, wobei R_2 das zu R_1 konjugierte Gitter bezeichnet, sei bekannt. Dann lässt sich $f(R_P) = \underline{u}(R_P) + i\underline{v}(R_P)$ eindeutig zu einer ℓ -diskret-holomorphen Gitterfunktion $f(R)$, $R = R_1 \cup R_2$, erweitern.

Bei der Erweiterung von $f(R_P)$ zu einer ℓ -diskret-holomorphen Gitterfunktion $f(R)$ kommt jedoch gegenüber dem Korollar 3.5 ein Zusatzschritt hinzu:

$$\begin{array}{ccccc} (7.1) & & (4.5) & & (3.5) \\ \Longrightarrow & f(R_P) & \Longrightarrow & f(R_1) & \Longrightarrow f(R) \end{array} .$$

(7.1) ist zwar, wie (1.8) und (4.3), auf einem starren Gitter definiert, jedoch ist der Fehler $|\underline{u}(P_1) - \hat{\underline{u}}(P_1)|$, wenn $\underline{u}$ die Lösung des in Abschn. 5.1 formulierten RWP I und $\hat{\underline{u}}$ eine diskrete Näherungslösung ist, welche (7.1) erfüllt, und der Rand von G aus Randstücken von Maschen von R_P besteht, von der Ordnung $O(h^6)$ [4].

Die Schwierigkeit in der Anwendung von (7.1) auf RWP I ergibt sich daraus, dass ein Analogon zu Satz 5.2 nicht bewiesen werden kann, denn (7.1) wurde in den zitierten Werken mit Hilfe von Differenzenverfahren hergeleitet. Die Approximation der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ mit Differenzen erlaubt es aber nicht zu beweisen, dass $v(Q_j') = \text{const.}$ für alle $Q_j' \in R_2 \cap C_{ab}$. Darauf wurde bereits in der Bemerkung auf S.44 hingewiesen.

Ein weiterer Nachteil von (7.1) zusammen mit der Approximation von $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ist der, dass die Matrix des resultierenden Gleichungssystems nicht symmetrisch ist.

Beide Nachteile lassen sich umgehen, wenn es gelingt, Formel (7.1) im Innern von G auch mit der FEM herzuleiten. Das Interesse dafür wird auch durch die hohe Genauigkeit dieser Approximation gerechtfertigt.

Das Gebiet G der xy -Ebene sei derart, dass es in kongruente Quadrate eingeteilt werden kann. Jedes Quadrat wird zusätzlich in zwei gleichschenkelig rechtwinklige Dreiecke eingeteilt (vgl. Fig. 30)

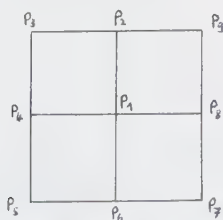


Fig. 30 a

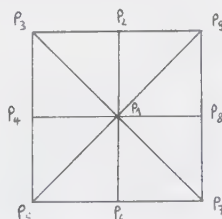


Fig. 30 b

In jedem Quadrat Q bzw. in jedem Dreieck der Triangulierung gelte der Ansatz

$$u_k(x,y) = k_1 + k_2x + k_3y + k_4xy$$

bzw.

$$u_l(x,y) = l_1 + l_2x + l_3y \quad ,$$

und wir betrachten die Integralausdrücke

$$I_G(u_k) = \iint_G \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (7.2)$$

$$I_G(u_l) = \iint_G \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_l}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (7.2')$$

unter den Nebenbedingungen

$$u_k(P_j) = u_l(P_j) = 0 \quad \forall P_j \in R_P \cap C_{da} \quad (7.3)$$

$$\text{und} \quad u_k(P_i) = u_l(P_i) = 1 \quad \forall P_i \in R_P \cap C_{bc}.$$

Die Integralausdrücke werden für die speziellen u_k und u_l zu quadratischen Formen [18], und zwar

$$I_G(u_k) = I_k(\underline{u}) = \frac{1}{2} \underline{u}^T A^{(k)} \underline{u} + [\underline{b}^{(k)}]^T \underline{u} + d^{(k)}, \quad (7.4)$$

$$I_G(u_l) = I_l(\underline{u}) = \frac{1}{2} \underline{u}^T A^{(l)} \underline{u} + [\underline{b}^{(l)}]^T \underline{u} + d^{(l)}. \quad (7.4')$$

Die Matrizen $A^{(k)}$ und $A^{(l)}$ bauen sich aus den Steifigkeitsmatrizen S_e der einzelnen Elemente auf, während $\underline{b}^{(k)}$, $\underline{b}^{(l)}$ und $d^{(k)}$, $d^{(l)}$ von den Steifigkeitsmatrizen der Elemente am Randstück C_{bc} stammen.

Das Problem, unter allen Funktionen $u_k(x,y)$ ($u_l(x,y)$) diejenige zu suchen, welche unter den Nebenbedingungen (7.3) den Integralausdruck (7.2) ((7.2')) minimiert, ist äquivalent zu dem diskreten Problem, unter allen Gitterfunktionen $\underline{u}: R_P \longrightarrow \mathbb{R}$ diejenige zu suchen, welche unter den Nebenbedingungen (7.3) die quadratische Form (7.4) ((7.4')) minimiert.

Wir wollen uns jedoch mit dem diskreten Problem beschäftigen, unter allen Gitterfunktionen $\underline{u}: R_P \longrightarrow \mathbb{R}$ diejenige zu suchen, welche

$$I(\underline{u}) = \frac{1}{2}I_k(\underline{u}) + \frac{1}{2}I_\ell(\underline{u})$$

minimiert, d.h. die Gitterfunktion $\underline{u}$ zu suchen, deren Funktionswerte $\underline{u}(P_j) = u_j$ für alle $P_j \in R_P$, $P_j \notin C$ die Bedingungs-
gleichung

$$\frac{\partial I(\underline{u})}{\partial u_j} = 0$$

erfüllen. Für welche Funktionen u dieses diskrete Problem äqui-
valent ist zur Bestimmung des Minimums

$$I_G(u) = \iint_G \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

unter der Nebenbedingung (7.3), ist jedoch unbekannt.

Wir betrachten alle Dreiecke der Triangulierung und alle Quadrate der Quadrateinteilung, die den Punkt P_1 besitzen (s. Fig. 30). Hier gilt

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial I_k}{\partial u_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial I_\ell}{\partial u_1} = 0.$$

Für den ersten Summanden gilt nach (4.3')

$$\frac{\partial I_k}{\partial u_1} = \frac{8u_1 - u_3 - u_5 - u_7 - u_9 - u_2 - u_4 - u_6 - u_8}{6},$$

währenddem für den zweiten Summanden aus (2.8) wegen der speziellen Einteilung in gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke

$$\frac{\partial I_\ell}{\partial u_1} = \frac{4u_1 - u_2 - u_4 - u_6 - u_8}{2}$$

folgt. Zusammen ergibt sich

$$\frac{20u_1 - 4(u_2 + u_4 + u_6 + u_8) - u_3 - u_5 - u_7 - u_9}{6} = 0, \quad (7.5)$$

was genau (7.1) entspricht.

Nun werde angenommen, dass (s. Fig. 30) $\widehat{P_3P_2}$ und $\widehat{P_2P_9}$ zum Randstück C_1 von G gehören, auf dem $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gelten soll. Da eine stetige, stückweise stetig partiell differenzierbare Funktion $u: G \longrightarrow \mathbb{R}$, welche den Integralausdruck

$$\iint_G \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

minimiert, die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ von selbst erfüllt, wird $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ im Punkt P_2 durch

$$\frac{\partial I}{\partial u_2} = \frac{1}{6}(10u_2 - 2u_3 - u_4 - 4u_1 - u_8 - 2u_9) = 0 \quad (7.6)$$

berücksichtigt. Analoge Randbedingungen werden hergeleitet für die Fälle, wo P_2 Eckpunkt bzw. eine einspringende Ecke des Randes von G darstellt.

Wir identifizieren nun die xy -Ebene wieder mit $\mathbb{C}$. Das durch die Quadrateinteilung definierte Gitter R_p erweitern wir unter Hinzunahme der Quadratmittelpunkte zum Gitter R_1 . Wie in Kap. 4 definieren wir zum Gitter R_1 das konjugierte Gitter R_2 , und zwar so, dass $K = \frac{1}{3}$ (s. Fig. 17). Löst man jetzt mit (7.5) und (7.6) RWP I von Kap. 5, und setzt man $\underline{v}(Q'_{j_0}) = \eta_0 = 0$, $Q'_{j_0} \in R_2 \cap C_{ab}$, so ist die Erweiterung von v auf R_2 wegen (7.5) eindeutig (vgl. Satz 3.4). Ohne Beweis formulieren wir den zu Satz 5.2 völlig analogen

Satz 7.1: Auf den Randstücken C_{ab} und C_{cd} gilt

$$\begin{aligned} \underline{v}(Q'_j) &= \text{const.} & \forall Q'_j \in R_2 \cap C_{ab} \\ \underline{v}(Q'_1) &= \text{const.} & \forall Q'_1 \in R_2 \cap C_{cd}. \end{aligned}$$

Aus der Minimierung von $I(\underline{u}) = \frac{1}{2}I_k(\underline{u}) + \frac{1}{2}I_\ell(\underline{u})$ ergibt sich zwar eine sehr gute Konvergenz der Gitterwerte, doch wirkt sich dieser Gewinn an lokaler Konvergenz ungünstig auf den Fehler des konformen Moduls aus. Es gilt der

Satz 7.2: Aus der Minimierung von $I(\underline{u}) = \frac{1}{2}I_k(\underline{u}) + \frac{1}{2}I_\ell(\underline{u})$ ergibt sich für den angenäherten konformen Modul ein grösserer Fehler als aus der Minimierung von $I_k(\underline{u})$ allein.

Beweis: Sei $R_P^{(n)}$ eine Folge quadratischer Gitter und sei $\underline{u}^{(n)}$ jene Gitterfunktion auf $R_P^{(n)}$, die $I(\underline{u}^{(n)})$ minimiert:

$$\begin{aligned}\bar{m}^{(n)}(G) &= 2I(\underline{u}^{(n)}) = I_k(\underline{u}^{(n)}) + I_\ell(\underline{u}^{(n)}) \\ &\leq 2I(\underline{u}^{(n)}) = I_k(\underline{u}^{(n)}) + I_\ell(\underline{u}^{(n)}) \quad \forall \underline{u}^{(n)}: R_P^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Mit $\underline{u}_k^{(n)}$ und $\underline{u}_\ell^{(n)}$ bezeichnen wir jene Gitterfunktionen auf R_P , für die

$$\begin{aligned}\bar{m}_k^{(n)}(G) &= 2I_k(\underline{u}_k^{(n)}) \leq 2I_k(\underline{u}^{(n)}) & \forall \underline{u}^{(n)}: R_P^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \bar{m}_\ell^{(n)}(G) &= 2I_\ell(\underline{u}_\ell^{(n)}) \leq 2I_\ell(\underline{u}^{(n)}) & \forall \underline{u}^{(n)}: R_P^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Da $\bar{m}_k^{(n)}(G) \leq \bar{m}_\ell^{(n)}(G)$ [8], gilt

$$\begin{aligned}\bar{m}^{(n)}(G) &= 2I(\underline{u}^{(n)}) = I_k(\underline{u}^{(n)}) + I_\ell(\underline{u}^{(n)}) \\ &\geq I_k(\underline{u}_k^{(n)}) + I_\ell(\underline{u}_\ell^{(n)}) \\ &\geq 2 \min(I_k(\underline{u}_k^{(n)}) , I_\ell(\underline{u}_\ell^{(n)})) \\ &= \min(\bar{m}_k^{(n)}(G) , \bar{m}_\ell^{(n)}(G)) = \bar{m}_k^{(n)}(G) ,\end{aligned}$$

woraus

$$\bar{m}^{(n)}(G) - m(G) \geq \bar{m}_k^{(n)}(G) - m(G)$$

folgt.

■

8. DER QUADRATISCHE ANSATZ IN DREIECKEN

Das in Kap. 2 formulierte elliptische RWP kann auch gelöst werden, indem die gesuchte $I_G(u)$ minimierende Funktion $u(x,y)$ mit quadratischen Ansätzen approximiert wird. Wiederum trianguliert man das Gebiet G , und in jedem Dreieck T_i gelte der Ansatz

$$u(x,y) = k_1 + k_2x + k_3y + k_4x^2 + k_5xy + k_6y^2. \quad (8.1)$$

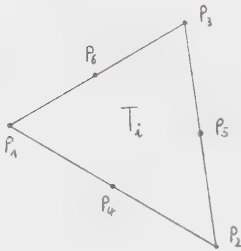


Fig. 31

Durch die Funktionswerte

$$u_j = u(P_j)$$

an den Eckpunkten und Seitenmittelpunkten

$P_j := (x_j, y_j)$, $j = 1, \dots, 6$,
des Dreieckes T_i (s. Fig. 31)
sind die Parameter k_j , $j=1, \dots, 6$,
eindeutig bestimmt. Für

$$I_{T_i}(u) = \iint_{T_i} \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (8.2)$$

erhält man dann, falls die Numerierung der Knotenpunkte P_j , $j=1, \dots, 6$ gemäss Fig. 31 erfolgt [18]

$$I_{T_i}(u) = \frac{1}{2} \underline{u}_e^T \underline{S}_e \underline{u}_e,$$

wobei

$$\underline{u}_e = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)^T,$$

und, wenn a, b, c die Bedeutung (2.5) haben,

$$S_e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3(a+2b+c) & c+b & b+a & -4(c+b) & 0 & -4(b+a) \\ c+b & 3c & -b & -4(c+b) & 4b & 0 \\ b+a & -b & 3a & 0 & 4b & -4(b+a) \\ -4(c+b) & -4(c+b) & 0 & 8(a+b+c) & -8(b+a) & 8b \\ 0 & 4b & 4b & -8(b+a) & 8(a+b+c) & -8(c+b) \\ -4(b+a) & 0 & -4(b+a) & 8b & -8(c+b) & 8(a+b+c) \end{bmatrix}.$$

Wie im linearen Fall erfüllen die Ansatzfunktionen auf der gemeinsamen Seite von benachbarten Dreiecken die Stetigkeitsbedingung, so dass die so definierte Funktion u zu einer für die Variationsaufgabe zulässigen Funktionenklasse gehört.

8.1 Bedingungsgleichung für einen Kantenpunkt im Innern von G

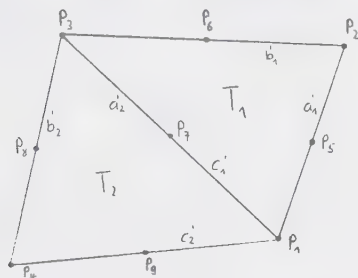


Fig. 32

Zuerst betrachten wir zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Numerierung der Knotenpunkte nach Fig. 32 vorgenommen worden. Wie im linearen Fall seien die zum Dreieck T_1 gehörenden Parameter mit a_1, b_1, c_1 und J_1

bezeichnet, wobei

$$a_1 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] / J_1$$

$$a_2 = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2] / J_2.$$

Dadurch sind alle Parameter $a_i, b_i, c_i, i=1,2$, festgelegt.

Für das Minimum von $I_G(u)$ im Fall von stückweise quadratischen Funktionen gilt notwendigerweise

$$\frac{\partial I_G}{\partial u_7} = \frac{\partial I_{T_1}}{\partial u_7} + \frac{\partial I_{T_2}}{\partial u_7} = 0 \quad (8.3)$$

mit

$$\frac{\partial I_{T_1}}{\partial u_7} = \frac{8}{6}(a_1+b_1+c_1)u_7 - \frac{8}{6}(b_1+c_1)u_6 + \frac{8}{6}b_1u_5 - \frac{4}{6}(b_1+a_1)u_3 - \frac{4}{6}(b_1+a_1)u_1$$

und

$$\frac{\partial I_{T_2}}{\partial u_7} = \frac{8}{6}(a_2+b_2+c_2)u_7 - \frac{8}{6}(a_2+b_2)u_8 + \frac{8}{6}b_2u_9 - \frac{4}{6}(c_2+b_2)u_3 - \frac{4}{6}(c_2+b_2)u_1.$$

Ersetzt man hier die Parameter a_i, b_i, c_i gemäss (2.6), so lautet die notwendige Bedingung für P_7

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_G}{\partial u_7} = \frac{8}{6} & \left[\left(\frac{b_1'^2 + a_1'^2 + c_1'^2}{2J_1} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 + c_2'^2}{2J_2} \right) u_7 \right. \\ & + \left(\frac{c_1'^2 - b_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} + \frac{a_2'^2 - b_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) u_1 + \left(\frac{c_1'^2 - b_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} + \frac{a_2'^2 - b_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) u_3 \\ & + \frac{b_1'^2 - a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} u_5 + \frac{a_1'^2 - b_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} u_6 \\ & \left. + \frac{b_2'^2 - a_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} u_9 + \frac{c_2'^2 - a_2'^2 - b_2'^2}{2J_2} u_8 \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

8.2 Bedingungsgleichung für einen Kantenpunkt am Rand C_1 von G

Es werde angenommen, dass in Fig.32 $P_1 \in C_1$ und $P_2 \in C_1$. Für P_5 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_G}{\partial u_5} = \frac{8}{6} & \left(\frac{b_1'^2 + a_1'^2 + c_1'^2}{2J_1} u_5 + \frac{a_1'^2 - b_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} u_1 + \frac{a_1'^2 - b_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} u_2 \right. \\ & \left. + \frac{b_1'^2 - a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} u_7 + \frac{c_1'^2 - a_1'^2 - b_1'^2}{2J_1} u_6 \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

8.3 Bedingungsgleichung für einen Eckpunkt im Innern von G

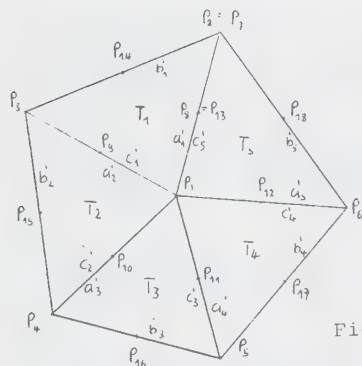


Fig. 33

Wir betrachten nun alle Dreiecke der Triangulierung mit dem gemeinsamen Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll die in Fig. 33 gezeichnete Situation mit fünf Dreiecken angenommen werden. Mit

$$a_i = [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]^{1/2}$$

sind alle Parameter b_i, c_i, a_i', b_i' und c_i' bestimmt. Für die Funktion u , welche in allen T_i quadratisch ist und $I_G(u)$ minimal macht, gilt im Punkt P_1 notwendigerweise

$$\frac{\partial I_G}{\partial u_1} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial I_{T_i}}{\partial u_1} = 0 \quad (8.6)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{T_i}}{\partial u_1} &= \frac{1}{2}(a_i + 2b_i + c_i)u_1 + \frac{1}{6}(b_i + c_i)u_{i+1} + \frac{1}{6}(a_i + b_i)u_{i+2} \\ &\quad - \frac{4}{6}(c_i + b_i)u_{i+7} - \frac{4}{6}(a_i + b_i)u_{i+8}, \end{aligned}$$

wenn $u_2 = u_7$ und $u_8 = u_{13}$.

Ersetzen wir hier die Parameter a_i, b_i und c_i gemäß (2.6), so erhält die Bedingungsgleichung (8.6) die Form

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_G}{\partial u_1} = & \left(\sum_{i=1}^5 \frac{b_i'^2}{2J_i} \right) u_1 + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{b_1'^2 - a_1'^2 + c_1'^2}{2J_1} + \frac{b_5'^2 + a_5'^2 - c_5'^2}{2J_5} \right) u_2 \right. \\
 & + \left(\frac{b_2'^2 - a_2'^2 + c_2'^2}{2J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} \right) u_3 + \left(\frac{b_3'^2 - a_3'^2 + c_3'^2}{2J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} \right) u_4 \\
 & + \left(\frac{b_4'^2 - a_4'^2 + c_4'^2}{2J_4} + \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{2J_3} \right) u_5 + \left. \left(\frac{b_5'^2 - a_5'^2 + c_5'^2}{2J_5} + \frac{b_4'^2 + a_4'^2 - c_4'^2}{2J_4} \right) u_6 \right] \\
 & - \frac{4}{3} \left[\left(\frac{b_1'^2 - a_1'^2 + c_1'^2}{2J_1} + \frac{b_5'^2 + a_5'^2 - c_5'^2}{2J_5} \right) u_8 + \left(\frac{b_2'^2 - a_2'^2 + c_2'^2}{2J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} \right) u_9 \right. \\
 & + \left(\frac{b_3'^2 - a_3'^2 + c_3'^2}{2J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} \right) u_{10} + \left(\frac{b_4'^2 - a_4'^2 + c_4'^2}{2J_4} + \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{2J_3} \right) u_{11} \\
 & + \left. \left(\frac{b_5'^2 - a_5'^2 + c_5'^2}{2J_5} + \frac{b_4'^2 + a_4'^2 - c_4'^2}{2J_4} \right) u_{12} \right] = 0. \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

8.4 Bedingungsgleichung für einen Eckpunkt am Rand C_1 von G

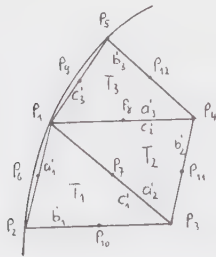


Fig. 34

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll angenommen werden, dass am Randstück C_1 von G die in Fig. 34 gezeichnete Situation gegeben sei. Mit

$$a_i = [(x_{i+1} - x_1)^2 + (y_{i+1} - y_1)^2] / J_i$$

sind alle Parameter b_i, c_i, a_i', b_i' und c_i' bestimmt. Aus

$$\frac{\partial I_G}{\partial u_1} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial I_{T_i}}{\partial u_1} = 0$$

folgt die notwendige Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_G}{\partial u_1} = & \left(\begin{matrix} 3 & b_1'^2 \\ \Sigma & 2J_1 \end{matrix} \right) u_1 + \frac{1}{3} \left[\frac{b_1'^2 - a_1'^2 + c_1'^2}{2J_1} u_2 \right. \\ & + \left(\frac{b_2'^2 - a_2'^2 + c_2'^2}{2J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} \right) u_3 + \left(\frac{b_3'^2 - a_3'^2 + c_3'^2}{2J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} \right) u_4 \\ & + \left. \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{2J_3} u_5 \right] - \frac{4}{3} \left[\frac{b_1'^2 - a_1'^2 + c_1'^2}{2J_1} u_6 \right. \\ & + \left(\frac{b_2'^2 - a_2'^2 + c_2'^2}{2J_2} + \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} \right) u_7 + \left(\frac{b_3'^2 - a_3'^2 + c_3'^2}{2J_3} + \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} \right) u_8 \\ & + \left. \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{2J_3} u_9 \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

8.5 Bedingungsgleichungen für Punkte im Innern von G im Fall von gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken

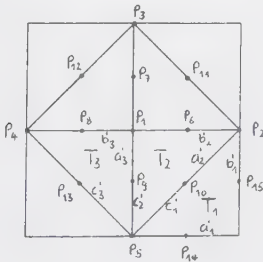


Fig. 35

Das Gebiet G sei regelmässig in gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke eingeteilt (s. Fig. 35). Für den Punkt P_9 auf der Kathete ergibt sich aus (8.4) die Bedingung

$$\frac{\partial I}{\partial u_9} = \frac{8}{6} (4u_9 - u_1 - u_{13} - u_5 - u_{10}) = 0. \quad (8.4')$$

Ebenso erhalten wir für den Punkt P_{10} auf der Hypothese

$$\frac{\partial I}{\partial u_{10}} = \frac{8}{6} (4u_{10} - u_6 - u_9 - u_{14} - u_{15}) = 0.$$

Für die Kantenpunkte reduziert sich (8.4) auf die Fünfpunkteformel (1.8) für ein quadratisches Gitter.

Für den Eckpunkt P_1 erhält man im speziellen die Bedingung

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = 4u_1 - \frac{4}{3}(u_6+u_7+u_8+u_9) + \frac{1}{3}(u_2+u_3+u_4+u_5) = 0. \quad (8.7')$$

Setzt man hier für u_6, u_7, u_8 und u_9 (8.4') ein, so wird

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = 4u_1 - u_{10} - u_{11} - u_{12} - u_{13} = 0. \quad (8.7'')$$

Für den Punkt P_2 resultiert ebenfalls (8.7') und (8.7''), so dass sich für die im Innern von G liegenden Eckpunkte (8.7') auf die Fünfpunkteformel (1.8) reduziert. Diese ist jedoch auf einem andern quadratischen, gegenüber jenem um $\pi/4$ verdrehten, Gitter gültig als (8.4').

Für die Praxis ist (8.7'') jedoch ohne Nutzen, denn verwendet man (8.7'') zusammen mit (8.4'), so geht die Symmetrie der resultierenden Matrix verloren.

9 DISKRETE HOLOMORPHIE IM FALL DES QUADRATISCHEN ANSATZES IM DREIECK

9.1 Definition des Gitters

Das endliche, einfach zusammenhängende Gebiet G der xy -Ebene mit dem stückweise stetig differenzierbaren Rand C sei derart trianguliert, dass alle vorkommenden Dreieckswinkel $\leq 90^\circ$ sind. Das aus Dreiecksseiten bestehende Polygon, welches C approximiert, soll mit $\bar{C}$ bezeichnet werden. Wir wollen wie in Kap. 3 in G ein Gitter $R = R_1 \cup R_2$ konstruieren, auf dem wir die diskrete Holomorphie einer Gitterfunktion so definieren können, dass der Real- und Imaginärteil von f im Innern von R_1 (8.4) und (8.7) und auf $R_1 \cap \bar{C}$ (8.5) und (8.8) erfüllen.

1. Definition der Gitterpunkte:

Wir gehen aus von der gegebenen Triangulierung von G und definieren

$$R'_1 := \{P_i = (x_i, y_i) / P_i \text{ Eckpunkt der geg. Triangulierung}\}^{1)}.$$

In der Fig. 36 sind die Gitterpunkte von R'_1 mit $\bullet$ markiert.

Das Gitter R'_1 erweitern wir nun unter Hinzunahme eines Gitters

$$R'_2 = \{\text{Umkreismittelpunkte}\}$$

zu einem Gitter $R' := R'_1 \cup R'_2$ ²⁾. Die Gitterpunkte von R'_2

¹⁾ Das Gitter R'_1 entspricht genau dem Gitter R_1 von Kap. 3. Es soll hier jedoch umbenannt werden, da es nicht alle 6 Knotenpunkte, die es zur eindeutigen Bestimmung eines im Dreieck quadratischen Polynoms braucht, enthält.

²⁾ Im Innern von G entspricht R' dem Gitter R von Kap. 3.

sind mit ■ in Fig. 36 eingetragen.

Weiter nehmen wir

$$R'_3 := \{\text{Seitenmittelpunkte der Dreiecke}\}$$

zum bestehenden Gitter R' hinzu und definieren damit

$$R_1 := R'_1 \cup R'_2 \cup R'_3 .$$

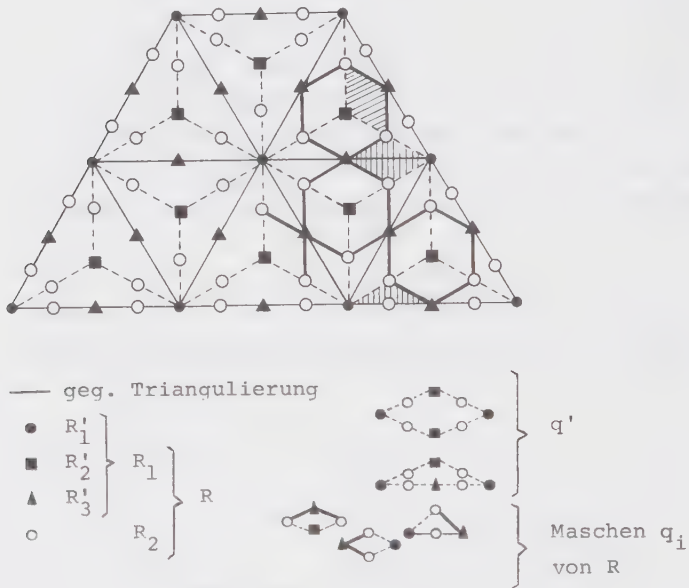


Fig. 36

In Fig. 36 sind die Punkte des Gitters R'_3 mit ▲ gekennzeichnet.

Verbinden wir alle Umkreismittelpunkte ■ mit den entsprechenden Eckpunkten ● (in Fig. 36 sind diese Umkreismittelpunkte mit ---- eingezeichnet), so entstehen im Innern und am Rand von G Vierecke bzw. Dreiecke, welche wir mit q' bezeichnen ¹⁾.

¹⁾ Die q'_i entsprechen den Maschen des in Kap. 3 def. Gitters R .

Wir erweitern nun das Gitter R_1 um das Gitter R_2 , bestehend aus den Mittelpunkten der Umkreisradien und denjenigen Punkten, welche die Dreiecksseiten von $\bar{C}$ vierteilen (in Fig. 36 sind die Punkte von R_2 mit o markiert), zu dem Gitter $R := R_1 \cup R_2$.

2. Definition der Maschen:

Um die Maschen des Gitters R festzulegen, verbinden wir sämtliche Gitterpunkte o von R_2 , welche auf den Umkreisradien liegen, mit den nächstgelegenen Mittelpunkten $\blacktriangle$ der Dreiecksseiten (in Fig. 36 zum Teil mit $\circ \rightarrow \blacktriangle$ eingetragen). Die entstehenden Vierecke, von denen je zwei gegenüberliegende Ecken zu R_1 bzw. R_2 gehören, bilden die Maschen q_{ij} von R im Innern von G . Am Rand sollen die "Vierecke", welche einen Winkel von 180° aufweisen, Maschen von R bilden. Die in Fig. 36 schraffierten Flächen sind Maschen von R .

3. Weitere Eigenschaften von R :

Anhand der Fig. 37, die einen Ausschnitt von Fig. 36 mit einem Viereck q'_1 und einem Dreieck q'_2 darstellt, sollen einige weitere Eigenschaften des Gitters R aufgezeigt werden:

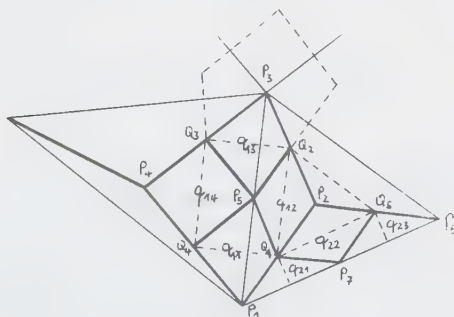


Fig. 37

- a) Das Viereck q'_1 im Innern von G besteht aus vier Maschen q_{1i} von R :

$$q'_1 = \bigcup_{i=1}^4 q_{1i}.$$

- b) Das Dreieck q'_2 am Rand von G besteht aus drei Maschen q_{2i} von R , wovon zwei einen Winkel von 180° aufweisen:

$$q'_2 = \bigcup_{i=1}^3 q_{2i}.$$

- c) q_{12}, q_{14} und q_{22} sind offenbar Rhomben. Ihre Diagonalen sind orthogonal und halbieren sich gegenseitig.
- d) q_{11} und q_{13} bzw. q_{21} und q_{23} sind ähnlich zu q'_1 bzw. q'_2 . Offensichtlich ist jede Seite parallel und halb so lang wie die entsprechende Seite von q'_1 bzw. q'_2 .
- e) Aus d) folgt die Orthogonalität der Diagonalen der Maschen q_{11}, q_{13}, q_{21} und q_{23} .
- f) Die Maschen des Gitters R_2 sind n -Ecke $n \geq 3$ (in Fig. 37 sind die Maschen von R_2 gestrichelt gezeichnet).

Im folgenden sollen die Punkte von R_1 stets mit P_i , die Punkte von R_2 mit Q_j und Q'_j bezeichnet werden. q_{ij} , i gerade, sollen immer Rhomben sein.

9.2 q -diskrete Holomorphie

Die xy -Ebene identifizieren wir mit $\mathbb{C}$, so dass $P_i \in R$ und $Q_j \in R$ diskrete Punkte der komplexen Zahlenebene werden. Sei $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und seien $P_1 \in R_1, Q_1 \in R_2$ und $P_2 \in R_1$ drei Punkte auf derselben Maschenseite von q'_1 (s. Fig. 37). Analog (1.1) und (1.2) wird ein Kurvenintegral von g längs der Maschenseite von P_1 nach P_2 approximiert durch

$$\int_{\widehat{P_1 P_2}} g(z) dz \approx \frac{g(P_1) + g(P_2)}{2} (P_2 - P_1) =: \int_{\widehat{P_1 P_2}}^{T_1} g(z) dz \quad (9.1)$$

bzw.

$$\int_{\widehat{P_1 P_2}} g(z) dz \approx \frac{g(P_1) + 2g(Q_1) + g(P_2)}{4} (P_2 - P_1) =: \int_{\widehat{P_1 P_2}}^{T_2} g(z) dz .$$

Die Näherungen $\int_{\widehat{P_1 P_2}}^{T_1} g(z) dz$ und $\int_{\widehat{P_1 P_2}}^{T_2} g(z) dz$ von $\int_{\widehat{P_1 P_2}} g(z) dz$

sind auch für Gitterfunktionen auf R definiert. Mit Hilfe dieser Näherungsformeln führen wir den Begriff der q -diskreten Holomorphie ¹⁾ für das Gitter R ein.

Definition 9.1: q -diskrete Holomorphie .

Eine Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst q -diskret-holomorph, wenn sie für beliebige q'_j folgende Eigenschaften hat:

$$\text{ES I: } \oint_{q_{ji}}^{T_1} f(z) dz - \oint_{q'_j}^{T_1} f(z) dz = 0 \quad i=1,3 \quad (9.2)$$

$$\text{ES II: } \oint_{q_{ji}}^{T_1} f(z) dz = 0 . \quad i=2,4$$

Bemerkung: ES II entspricht der Definition 3.1 einer ℓ -diskret-holomorphen Gitterfunktion.

■

In der Definition 9.1 ist, im Gegensatz zur Definition 3.1 (ℓ -diskrete Holomorphie), der Satz von Morera nur noch beschränkt erkennbar. Es gilt jedoch der

¹⁾ Der Buchstabe q soll andeuten, dass Real- und Imaginärteil einer diskreten Gitterfunktion die Bedingungsgleichungen eines in den Dreiecken *quadratischen* Polynoms erfüllen (vgl. Satz 9.4 und 9.5).

Satz 9.1: Eine q -diskret-holomorphe Gitterfunktion f erfüllt

$$\oint_{q'_j} f(z) dz = 0 ,$$

wobei das Integral über eine Maschenseite von q'_j nach der Simpsonregel (1.3) berechnet wird.

Beweis:

$$\oint_{q'_{j1}} f(z) dz - \oint_{q'_j} f(z) dz = 0$$

$$\oint_{q'_{j2}} f(z) dz = 0$$

$$\oint_{q'_{j3}} f(z) dz - \oint_{q'_j} f(z) dz = 0$$

$$\oint_{q'_{j4}} f(z) dz = 0$$

Wegen $\sum_{i=1}^4 \oint_{q'_{ji}} f(z) dz = \oint_{q'_j} f(z) dz$ und (1.3) ergibt die Summe

$$\oint_{q'_j} f(z) dz - 2 \oint_{q'_j} f(z) dz = 6 \oint_{q'_j} f(z) dz = 0 ,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Da ES II der Definition 3.1 der ℓ -diskreten Holomorphie entspricht, gelten in den Bezeichnungen der Fig. 37 nach Satz 3.1

$$i[f(Q_2) - f(Q_1)] = \left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_5 - P_2} \right| (f_5 - f_2) \quad (9.3)$$

$$i[f(Q_4) - f(Q_3)] = \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_5 - P_4} \right| (f_5 - f_4) .$$

Zu (9.3) analoge Beziehungen ergeben sich auch aus ES I. Dazu der

Satz 9.2: In den Bezeichnungen der Fig. 37 erfüllt eine Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ ES I genau dann, wenn

$$\left| \frac{Q_4 - Q_1}{P_5 - P_1} \right| [4(f_5 - f_1) - (f_3 - f_1)] = i [4(f(Q_1) - f(Q_4)) - (f_2 - f_4)]$$

bzw. (9.4)

$$\left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_5 - P_1} \right| [4(f_5 - f_3) - (f_1 - f_3)] = i [4(f(Q_3) - f(Q_2)) - (f_4 - f_2)].$$

Beweis: Aus ES I folgt für die Masche q_{j1}

$$\begin{aligned} & 8 \left((Q_1 - P_1) \frac{f_1 + f(Q_1)}{2} + (P_5 - Q_1) \frac{f(Q_1) + f_5}{2} + (Q_4 - P_5) \frac{f_5 + f(Q_4)}{2} + \right. \\ & \quad \left. (P_1 - Q_4) \frac{f(Q_4) + f_1}{2} \right) - \left((P_2 - P_1) \frac{f_1 + f_2}{2} + (P_3 - P_2) \frac{f_2 + f_3}{2} + \right. \\ & \quad \left. (P_4 - P_3) \frac{f_3 + f_4}{2} + (P_1 - P_4) \frac{f_4 + f_1}{2} \right) \\ & = 4[(P_5 - P_1)(f(Q_1) - f(Q_4)) + (Q_4 - Q_1)(f_5 - f_1)] \\ & \quad - \frac{1}{2}[(P_3 - P_1)(f_2 - f_4) + (P_4 - P_2)(f_3 - f_1)] = 0. \end{aligned}$$

Da $P_5 - P_1 = \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$ und $Q_4 - Q_1 = \frac{1}{2}(P_4 - P_2)$, schreibt sich diese Gleichung auch als

$$(P_5 - P_1)[4(f(Q_1) - f(Q_4)) - (f_2 - f_4)] + (Q_4 - Q_1)[4(f_5 - f_1) - (f_3 - f_1)] = 0.$$

Mit $\frac{Q_4 - Q_1}{P_5 - P_1} = i \left| \frac{Q_4 - Q_1}{P_5 - P_1} \right|$ folgt dann die Behauptung.

Die zweite Gleichung von (9.4) leitet man analog her. Die Umkehrung ist offensichtlich und soll nicht mehr speziell gezeigt werden.

Eine Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ ist also genau dann q -diskret-holomorph, wenn in jeder Masche q' von R' mit den Bezeichnungen der Fig. 37 (9.3) und (9.4) erfüllt werden.

Wie im linearen Fall lässt sich nun zeigen, dass Real- und Imaginärteil einer q -diskret-holomorphen Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ im Innern von G denselben Bedingungsgleichungen genügen, wie die Näherungslösung von

$$\Delta u = 0 ,$$

die mit quadratischen Ansätzen in Dreiecken bestimmt wird.

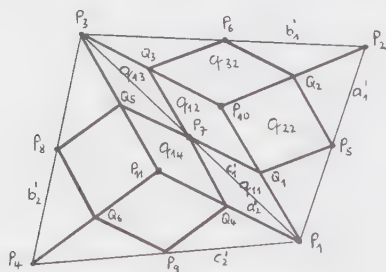


Fig. 38

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nochmals die beiden Dreiecke T_1 und T_2 in Fig. 32. In diese legen wir, wie in Fig. 38 dargestellt, das Gitter R . Wir zeigen zuerst das

Lemma 9.3: Mit den Bezeichnungen der Fig. 38 gelten

$$\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| (f_7 - f_{10}) = \frac{a_1'^2 + c_1'^2 - b_1'^2}{2J_1} (f_7 - f_5) + \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{2J_1} (f_7 - f_6)$$

bzw.

$$\left| \frac{Q_4 - Q_5}{P_{11} - P_7} \right| (f_7 - f_{11}) = \frac{a_2'^2 + b_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} (f_7 - f_8) + \frac{a_2'^2 + c_2'^2 - b_2'^2}{2J_2} (f_7 - f_9) .$$

Beweis: Wir zeigen die erste Behauptung; die zweite ergibt sich analog.

In den Maschen q_{12}, q_{22} , und q_{32} gelten die drei zu ES II äquivalenten Formeln (9.3):

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| (f_7 - f_{10}) &= i[f(Q_3) - f(Q_1)] \\ \left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right| (f_5 - f_{10}) &= i[f(Q_1) - f(Q_2)] \\ \left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right| (f_6 - f_{10}) &= i[f(Q_2) - f(Q_3)] . \end{aligned}$$

Die Addition dieser Beziehungen ergibt

$$\left(\left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right| + \left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right| + \left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| \right) f_{10} = \left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right| f_5 + \left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right| f_6 + \left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| f_7 .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$W := \left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right| + \left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right| + \left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| ,$$

so wird

$$f_{10} = \frac{\left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right|}{W} f_5 + \frac{\left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right|}{W} f_6 + \frac{\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right|}{W} f_7 ,$$

und daraus folgt

$$f_7 - f_{10} = \frac{W}{W} f_7 - \frac{\left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right|}{W} f_5 - \frac{\left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right|}{W} f_6 - \frac{\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right|}{W} f_7$$

und

$$\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| (f_7 - f_{10}) = \frac{\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right|}{W} \left[\left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right| (f_7 - f_5) + \left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right| (f_7 - f_6) \right] . \quad (9.5)$$

Mit Hilfe der Formel (3.9) im Beweis von Lemma 3.2 zeigt man, dass

$$\left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right| = 2 \left| \frac{P_1 - P_2}{P_{10} - P_5} \right| = \frac{2J_1}{c_1'^2 + b_1'^2 - a_1'^2} =: \frac{2J_1}{H_1},$$

$$\left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right| = 2 \left| \frac{P_2 - P_3}{P_{10} - P_6} \right| = \frac{2J_1}{a_1'^2 + c_1'^2 - b_1'^2} =: \frac{2J_1}{H_2},$$

$$\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| = 2 \left| \frac{P_3 - P_1}{P_{10} - P_7} \right| = \frac{2J_1}{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2} =: \frac{2J_1}{H_3},$$

woraus folgt

$$W = \frac{2J_1 (H_2 H_3 + H_1 H_2 + H_1 H_3)}{H_1 H_2 H_3}.$$

In (9.5) wollen wir den Koeffizienten von $f_7 - f_5$ betrachten:

$$\frac{\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| \cdot \left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right|}{W} = \frac{2J_1 H_2}{H_2 H_3 + H_1 H_2 + H_1 H_3}. \quad (9.6)$$

Im Nenner sind

$$H_1 H_2 = c_1'^4 - b_1'^4 - a_1'^4 + 2b_1'^2 a_1'^2,$$

$$H_2 H_3 = a_1'^4 - b_1'^4 - c_1'^4 + 2b_1'^2 c_1'^2,$$

$$H_3 H_1 = b_1'^4 - c_1'^4 - a_1'^4 + 2c_1'^2 a_1'^2$$

und

$$H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_3 H_1 = 2b_1'^2 a_1'^2 + 2b_1'^2 c_1'^2 + 2c_1'^2 a_1'^2 - a_1'^4 - b_1'^4 - c_1'^4.$$

In einem Dreieck mit den Seiten der Länge a_1' , b_1' und c_1' gilt die Heron'sche Flächenformel

$$S = \sqrt{p(p-a_1')(p-b_1')(p-c_1')}$$

mit

$$p = \frac{1}{2}(a_1' + b_1' + c_1') .$$

Somit wird

$$\begin{aligned} s^2 &= p(p-a_1')(p-b_1')(p-c_1') \\ &= \frac{1}{16}(2b_1'^2 a_1'^2 + 2b_1'^2 c_1'^2 + 2c_1'^2 a_1'^2 - a_1'^4 - b_1'^4 - c_1'^4) \end{aligned}$$

und

$$H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3 = 16s^2 = 4J_1^2 . \quad (9.7)$$

Setzt man (9.7) in (9.6) ein, erhält man

$$\frac{\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| \left| \frac{Q_1 - Q_2}{P_{10} - P_5} \right|}{W} = \frac{H_2}{2J_1} = \frac{a_1'^2 + c_1'^2 - b_1'^2}{2J_1} .$$

Analog bekommt man für den Koeffizienten von $f_7 - f_6$

$$\frac{\left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| \left| \frac{Q_2 - Q_3}{P_{10} - P_6} \right|}{W} = \frac{H_1}{2J_1} = \frac{c_1'^2 + b_1'^2 - a_1'^2}{2J_1} .$$

Damit ist Lemma 9.3 bewiesen. ■

Satz 9.4: Der Realteil (Imaginärteil) einer q -diskret-holomorphen Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ erfüllt im Innern von R_3' die Bedingungsgleichung (8.4).

Beweis: Wir betrachten wieder Fig. 38. Die Bezeichnungen der Knotenpunkte sind gleich wie in Fig. 32. Für die Maschen q_{1i} , $i=1, \dots, 4$, gelten die zu (9.2) äquivalenten Formeln (9.3) und (9.4), also

$$\left| \frac{Q_4 - Q_1}{P_7 - P_1} \right| [4(f_7 - f_1) - (f_3 - f_1)] = i[4(f(Q_1) - f(Q_4)) - (f_{10} - f_{11})]$$

$$\left| \frac{Q_3 - Q_5}{P_7 - P_3} \right| [4(f_7 - f_3) - (f_1 - f_3)] = i[4(f(Q_5) - f(Q_3)) - (f_{11} - f_{10})],$$

bzw.

$$4 \left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| (f_7 - f_{10}) = i 4[f(Q_3) - f(Q_1)]$$

$$4 \left| \frac{Q_4 - Q_5}{P_{11} - P_7} \right| (f_7 - f_{11}) = i 4[f(Q_4) - f(Q_5)] .$$

Addiert man die vier Beziehungen und berücksichtigt, dass

$$\left| \frac{Q_4 - Q_1}{P_7 - P_1} \right| = \left| \frac{Q_3 - Q_5}{P_7 - P_5} \right| = \left| \frac{P_{10} - P_{11}}{P_3 - P_1} \right| ,$$

so gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_{10} - P_{11}}{P_3 - P_1} \right| [(f_7 - f_1) + (f_7 - f_3)] + \left| \frac{Q_3 - Q_1}{P_{10} - P_7} \right| (f_7 - f_{10}) \\ + \left| \frac{Q_4 - Q_5}{P_{11} - P_7} \right| (f_7 - f_{11}) = 0 . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Nach Lemma 3.2 ist

$$\left| \frac{P_{10} - P_{11}}{P_3 - P_1} \right| = \frac{a_1'^2 + b_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} + \frac{c_2'^2 + b_2'^2 - a_2'^2}{4J_2} .$$

Setzt man die Ergebnisse der Lemmata 3.2 und 9.3 in (9.8) ein und ordnet nach f_i , bekommt man

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_1'^2 + a_1'^2 + c_1'^2}{2J_1} + \frac{b_2'^2 + c_2'^2 + a_2'^2}{2J_2} \right) f_7 + \\ \left(\frac{c_1'^2 - a_1'^2 - b_1'^2}{4J_1} + \frac{a_2'^2 - b_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) f_1 + \left(\frac{c_1'^2 - a_1'^2 - b_1'^2}{4J_1} + \frac{a_2'^2 - b_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} \right) f_3 + \end{aligned}$$

$$\frac{b_1'^2 - a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} f_5 + \frac{a_1'^2 - b_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} f_6 + \frac{b_2'^2 - a_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} f_9 + \frac{c_2'^2 - b_2'^2 - a_2'^2}{2J_2} f_8 = 0.$$

Nehmen wir hier nur den Realteil (Imaginärteil) und multiplizieren mit $\frac{8}{6}$, so erhalten wir (8.4). ■

Bemerkung: Würden wir die q-diskrete Holomorphie mit der Simpsonregel

$$\oint_{q_1'}^S f(z) dz = 0$$

definieren, könnte Satz 9.4 nicht bewiesen werden. ■

Dass wir aus der Definition der q-diskreten Holomorphie auch die FEM-Formel (8.7) erhalten, zeigt der

Satz 9.5: Der Realteil (Imaginärteil) einer q-diskret-holomorphen Gitterfunktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ erfüllt im Innern von R_1' die Bedingungsgleichung (8.7).

Beweis:

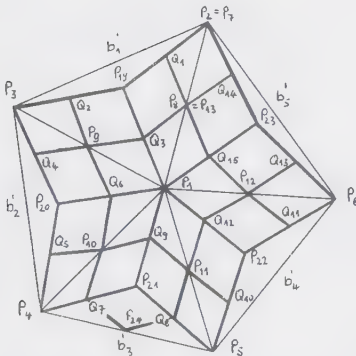


Fig. 39

Wir betrachten die Dreiecke der Triangulierung in Fig. 33. In diese legen wir ein Gitter R gemäss Fig. 39. Für jedes q_j' $j = 1, \dots, 5$, wenden wir die zu ES I äquivalente Formel (9.4) an:

$$\left| \frac{Q_3 - Q_{15}}{P_8 - P_1} \right| [4(f_8 - f_1) - (f_2 - f_1)] = i[4(f(Q_{15}) - f(Q_3)) - (f_{23} - f_{19})]$$

$$\left| \frac{Q_6 - Q_3}{P_9 - P_1} \right| [4(f_9 - f_1) - (f_3 - f_1)] = i[4(f(Q_3) - f(Q_6)) - (f_{19} - f_{20})]$$

$$\left| \frac{Q_9 - Q_6}{P_{10} - P_1} \right| [4(f_{10} - f_1) - (f_4 - f_1)] = i[4(f(Q_6) - f(Q_9)) - (f_{20} - f_{21})]$$

$$\left| \frac{Q_{12} - Q_9}{P_{11} - P_1} \right| [4(f_{11} - f_1) - (f_5 - f_1)] = i[4(f(Q_9) - f(Q_{12})) - (f_{21} - f_{22})]$$

$$\left| \frac{Q_{15} - Q_{12}}{P_{12} - P_1} \right| [4(f_{12} - f_1) - (f_6 - f_1)] = i[4(f(Q_{12}) - f(Q_{15})) - (f_{22} - f_{23})] .$$

Die Addition dieser Beziehungen ergibt

$$\begin{aligned} & - \left(\left| \frac{Q_3 - Q_{15}}{P_8 - P_1} \right| + \left| \frac{Q_6 - Q_3}{P_9 - P_1} \right| + \left| \frac{Q_9 - Q_6}{P_{10} - P_1} \right| + \left| \frac{Q_{12} - Q_9}{P_{11} - P_1} \right| + \left| \frac{Q_{15} - Q_{12}}{P_{12} - P_1} \right| \right) f_1 \\ & - \left| \frac{Q_3 - Q_{15}}{P_8 - P_1} \right| f_2 - \left| \frac{Q_6 - Q_3}{P_9 - P_1} \right| f_3 - \left| \frac{Q_9 - Q_6}{P_{10} - P_1} \right| f_4 - \left| \frac{Q_{12} - Q_9}{P_{11} - P_1} \right| f_5 - \left| \frac{Q_{15} - Q_{12}}{P_{12} - P_1} \right| f_6 \\ & + 4 \left(\left| \frac{Q_3 - Q_{15}}{P_8 - P_1} \right| f_8 + \left| \frac{Q_6 - Q_3}{P_9 - P_1} \right| f_9 + \left| \frac{Q_9 - Q_6}{P_{10} - P_1} \right| f_{10} + \left| \frac{Q_{12} - Q_9}{P_{11} - P_1} \right| f_{11} + \left| \frac{Q_{15} - Q_{12}}{P_{12} - P_1} \right| f_{12} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Ersetzt man hier die Brüche durch die sich nach Lemma 3.2 ergebenden Beziehungen

$$\left| \frac{Q_3 - Q_{15}}{P_8 - P_{11}} \right| = \left| \frac{P_{19} - P_{23}}{P_2 - P_1} \right| = \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{4J_1} + \frac{b_5'^2 + a_5'^2 - c_5'^2}{4J_5}$$

usw. ,

multipliziert mit $-\frac{2}{3}$ und berücksichtigt nur noch den Realteil (Imaginärteil), so erhält man (8.7). ■

Kennt man die Funktionswerte $f(R_1' \cup R_3') = u(R_1' \cup R_3') + iv(R_1' \cup R_3')$ (s. Fig. 36) einer q -diskret-holomorphen Funktion und einen Wert $f(Q_0)$, $Q_0 \in R_2$, so lässt sich $f(R_2)$ mit Hilfe von (9.3) und (9.4) auf eindeutige Art berechnen.

Satz 9.6: Es sei $R = R_1' \cup R_2' \cup R_3' \cup R_2$ ein Gitter nach Abschn. 9.1. Erfüllen der Realteil u und der Imaginärteil v einer gegebenen Gitterfunktion $f_1: R_1' \cup R_3' \longrightarrow \mathbb{C}$ im Innern von R_1' und R_3' die FEM-Formeln (8.7) bzw. (8.4), dann kann bei Kenntnis eines Wertes $f(Q_0)$, $Q_0 \in R_2$, die gegebene Gitterfunktion eindeutig zu einer q -diskret-holomorphen Gitterfunktion $f: R \longrightarrow \mathbb{C}$ erweitert werden, so dass $f|_{R_1' \cup R_3'} = f_1$.

Beweis: Der Beweis soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit anhand der Fig. 39 geführt werden. Zuerst erweitern wir $f: R_1' \cup R_3' \longrightarrow \mathbb{C}$ zu einer Funktion $f: R_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, indem wir zum Beispiel für $P_{21} \in R_2'$ setzen:

$$f_{21} = \frac{\left| \frac{Q_9 - Q_8}{P_{21} - P_{11}} \right|}{W} f_{11} + \frac{\left| \frac{Q_7 - Q_9}{P_{21} - P_{10}} \right|}{W} f_{10} + \frac{\left| \frac{Q_7 - Q_8}{P_{21} - P_{24}} \right|}{W} f_{24}$$

$$\text{mit } W = \left| \frac{Q_9 - Q_8}{P_{21} - P_{11}} \right| + \left| \frac{Q_7 - Q_9}{P_{21} - P_{10}} \right| + \left| \frac{Q_7 - Q_8}{P_{21} - P_{24}} \right|.$$

Die Funktionswerte für die übrigen $P_j \in R_2'$ erhält man entsprechend. Dadurch wird die Eindeutigkeit längs einer Dreiecksmasche von R_2 gewährleistet, und die Aussage von Lemma 9.3 wird gültig.

Sei $Q_0 = Q_9$. Es genügt nun zu zeigen, dass die Eindeutigkeit längs einer Masche von R_2 mit einem Kantenpunkt als Zentrum und längs einer Masche von R_2 mit einem Eckpunkt als Zentrum erhalten bleibt. Berechnet man also, ausgehend von $f(Q_9)$, der Reihe

nach $f(Q_8)$, $f(Q_{10})$, $f(Q_{12})$ und $\hat{f}(Q_9)$, so muss $f(Q_9) = \hat{f}(Q_9)$ sein.

$$\begin{aligned} \hat{f}(Q_9) &= f(Q_9) + [f(Q_8) - f(Q_9)] + [f(Q_{10}) - f(Q_8)] \\ &\quad + [f(Q_{12}) - f(Q_{10})] + [\hat{f}(Q_9) - f(Q_{12})] \\ &= f(Q_9) + \frac{1}{i} \left| \frac{Q_8 - Q_9}{P_{11} - P_{21}} \right| (f_{11} - f_{21}) + \frac{1}{i} \left| \frac{Q_{10} - Q_8}{P_{11} - P_5} \right| [f_{11} - f_5 - \frac{1}{4}(f_1 - f_5)] \\ &\quad + \frac{1}{4}(f_{22} - f_{21}) + \frac{1}{i} \left| \frac{Q_{12} - Q_{10}}{P_{11} - P_{22}} \right| (f_{11} - f_{22}) \\ &\quad + \frac{1}{i} \left| \frac{Q_9 - Q_{12}}{P_{11} - P_1} \right| [f_{11} - f_1 - \frac{1}{4}(f_5 - f_1)] + \frac{1}{4}(f_{21} - f_{22}) \\ &= f(Q_9) + \frac{1}{i} \left\{ \left| \frac{Q_8 - Q_9}{P_{11} - P_{21}} \right| (f_{11} - f_{21}) + \left| \frac{Q_{10} - Q_8}{P_{11} - P_5} \right| (f_{11} - f_5) \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{Q_{12} - Q_{10}}{P_{11} - P_{22}} \right| (f_{11} - f_{22}) + \left| \frac{Q_9 - Q_{12}}{P_{11} - P_1} \right| (f_{11} - f_1) \right\} \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist aber gleich der linken Seite von (9.8) und ist, da Lemma 9.3 wegen der speziellen Wahl von $f(R'_2)$ anwendbar ist und weil im Innern von R'_3 (8.4) gilt, gleich Null. Damit ist die Eindeutigkeit längs der Masche von R_2 mit Zentrum P_{11} gezeigt. Analog weist man auch die Eindeutigkeit längs der Maschen um $P_j \in R'_1$ nach, wobei dort jedoch die FEM-Formel (8.7) zur Anwendung gelangt.

Bemerkung 1: Ohne Beweis soll auf folgende Tatsache aufmerksam gemacht werden:

Für eine ℓ -diskret-holomorphe Gitterfunktion könnte Satz 9.4 gleichwohl bewiesen werden, während Satz 9.5 seine Gültigkeit verlieren würde.

Bemerkung 2: Der Satz 9.6 kann nicht in der Formulierung von Satz 3.4 bewiesen werden. Es ist notwendig, dass Realteil und Imaginärteil der Gitterfunktion $f: R'_1 \cup R'_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ bekannt sind und (2.4) und (2.7) erfüllen. Betrachten wir zum Beispiel den Realteil der Formel (9.4), so ist offensichtlich, dass zur Berechnung von $v(P_2)$ auch Werte $v(P_1)$, $P_1 \in R_1$, nötig sind.

Bemerkung 3: Zum Beweis der Eindeutigkeit der Erweiterung von f_1 zur q -diskret-holomorphen Funktion f braucht man nur die Bedingungsgleichungen im Innern des Gitters $R_1 \cup R'_3$, denn Gitterpunkte P_i auf dem Rand $\bar{C}_1$ sind nicht mehr Zentren von Maschen von R_2 (vgl. dazu Fig. 37).

9.3 Spezial- und Sonderfälle

Wir wollen auch für den in den Dreiecken quadratischen Ansatz den in Anwendungen häufig vorkommenden Fall behandeln, wo rechtwinklige Dreiecke auftreten. Dass hier der Satz 9.4 immer noch seine Gültigkeit hat, soll in zwei häufig vorkommenden Fällen gezeigt werden.

Im ersten Fall wollen wir von der Fig. 38 ausgehen und annehmen, die Dreiecke würden sich so verändern, dass $\widehat{P_3 P_1}$ gemeinsame Hypotenuse wird. Es liegt dann folgende Situation vor (s. Fig. 40):

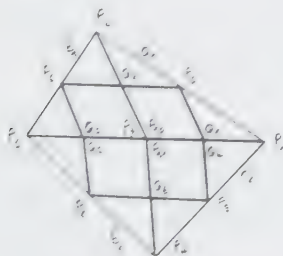


Fig. 40

Unter Berücksichtigung, dass

$$c_1'^2 = a_1'^2 + b_1'^2$$

$$\text{und } a_2'^2 = b_2'^2 + c_2'^2,$$

wird (8.4) zu

$$\frac{\partial I_G}{\partial u_7} = \frac{8}{6} \left[\left(\frac{c_1'^2}{J_1} + \frac{a_2'^2}{J_2} \right) u_7 + \frac{b_1'^2 - a_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} u_5 + \frac{a_1'^2 - b_1'^2 - c_1'^2}{2J_1} u_6 \right. \\ \left. + \frac{b_2'^2 - a_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} u_9 + \frac{c_2'^2 - b_2'^2 - a_2'^2}{2J_2} u_8 \right] = 0. \quad (9.10)$$

Um Satz 9.4 mit (9.10) statt mit (8.4) zu beweisen, ist Lemma 9.3 nicht mehr nötig. Es gilt hier nach (9.2), weil $P_7 = P_{10} = P_{11}$

$$\left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_5 - P_7} \right| (f_7 - f_5) = i[f(Q_2) - f(Q_1)] ,$$

$$\left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_6 - P_7} \right| (f_7 - f_6) = i[f(Q_3) - f(Q_2)] ,$$

$$\left| \frac{Q_6 - Q_3}{P_8 - P_7} \right| (f_7 - f_8) = i[f(Q_6) - f(Q_3)] ,$$

$$\left| \frac{Q_1 - Q_6}{P_9 - P_7} \right| (f_7 - f_9) = i[f(Q_1) - f(Q_6)] .$$

Addiert man hier die vier Beziehungen und berücksichtigt, dass nach (3.9) gilt

$$\left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_5 - P_7} \right| = \left| \frac{P_6 - P_7}{Q_2 - Q_3} \right| = 2 \left| \frac{P_6 - P_7}{P_2 - P_3} \right| = \frac{a_1'^2 + c_1'^2 - b_1'^2}{2J_1} ,$$

$$\left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_6 - P_7} \right| = \left| \frac{P_5 - P_7}{Q_2 - Q_1} \right| = 2 \left| \frac{P_5 - P_7}{P_2 - P_1} \right| = \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{2J_1} ,$$

$$\left| \frac{Q_6 - Q_3}{P_8 - P_7} \right| = \left| \frac{P_9 - P_7}{Q_6 - Q_1} \right| = 2 \left| \frac{P_9 - P_7}{P_4 - P_1} \right| = \frac{a_2'^2 + b_2'^2 - c_2'^2}{2J_2} ,$$

$$\left| \frac{Q_1 - Q_6}{P_9 - P_7} \right| = \left| \frac{P_7 - P_8}{Q_6 - Q_5} \right| = 2 \left| \frac{P_7 - P_8}{P_4 - P_3} \right| = \frac{a_2'^2 + c_2'^2 - b_2'^2}{2J_2} ,$$

$$4 \left| \frac{Q_4 - Q_5}{P_{11} - P_7} \right| (f_7 - f_{11}) = 4i[f(Q_4) - f(Q_5)] ,$$

$$4 \left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_5 - P_7} \right| (f_7 - f_5) = 4i[f(Q_2) - f(Q_1)] ,$$

$$4 \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_6 - P_7} \right| (f_7 - f_6) = 4i[f(Q_3) - f(Q_2)] .$$

Werden diese fünf Beziehungen addiert, erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q_5 - Q_3}{P_7 - P_3} \right| (f_7 - f_3) + \left| \frac{Q_1 - Q_4}{P_7 - P_1} \right| (f_7 - f_1) + \left| \frac{Q_4 - Q_5}{P_{11} - P_7} \right| (f_7 - f_{11}) \\ + \left| \frac{Q_2 - Q_1}{P_5 - P_7} \right| (f_7 - f_5) + \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_6 - P_7} \right| (f_7 - f_6) = 0 . \end{aligned}$$

Wie im letzten Fall zeigt man jetzt mit Hilfe von Lemma 3.2, dass aus dieser Gleichung (9.11) folgt.

Der Satz 9.5 behält seine Gültigkeit bei rechtwinkligen Dreiecken. Für Maschen, die zum "Zweieck" entartet sind, wird die linke Seite von (9.4) gleich Null und muss deshalb gar nicht berücksichtigt werden. Für Maschen, die zu Dreiecken geworden sind, wie etwa $P_3Q_5P_7$ in Fig. 41, bekommt (9.4) einen Sinn, wenn ein solches Dreieck als Viereck mit einer Ecke von 180° aufgefasst wird, so wie die Maschen am Rand von G.

Auch der Satz 9.6 über die Eindeutigkeit einer Erweiterung einer Gitterfunktion $f: R'_1 \cup R'_3 \longrightarrow \mathbb{C}$ bleibt erhalten, soll aber hier nicht explizit ausgeführt werden.

9.4 Anwendung der q-diskret-holomorphen Funktionen zur Konstruktion konformer Abbildungen

Wir betrachten nochmals die beiden RWPe von Kap. 5, deren Lösungen Real- und Imaginärteil einer konformen Abbildung von G auf ein Rechteck sind. Wir finden eine Näherungslösung des RWP I, indem wir zur Minimierung des Integrals

$$I_G(u) = \iint_G \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

stetige Funktionen verwenden, welche in den Dreiecken der Triangulierung von G quadratisch sind. Die Lösung $\bar{u}$ erfüllt auf $\bar{C}_1 = \bar{C}_{ab} \cup \bar{C}_{cd}$, wo $\bar{C}_{ab}$ und $\bar{C}_{cd}$ die C_{ab} und C_{cd} approximierenden Polygone sind, (8.8) und (8.5). Eine solche Näherungslösung erfüllt die Bedingungen, die im folgenden Satz an den Realteil einer q-diskret-holomorphen Gitterfunktion gestellt sind.

Satz 9.7: Erfüllt der Realteil einer q-diskret-holomorphen Gitterfunktion f neben Satz 9.4 und 9.5 auf dem Rand $\bar{C}_1$ (8.8) und (8.5) und gelten für den Imaginärteil von f

$$\begin{aligned} v_i &= v(P_i) = \text{const.} & \forall P_i \in R_1 \cap \bar{C}_{cd} \\ \text{und} \\ v_j &= v(P_j) = \text{const.} & \forall P_j \in R_1 \cap \bar{C}_{ab}, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\begin{aligned} v(Q'_i) &= \text{const.} & \forall Q'_i \in R_2 \cap \bar{C}_{cd}, \\ v(Q'_j) &= \text{const.} & \forall Q'_j \in R_2 \cap \bar{C}_{ab}. \end{aligned}$$

Beweis: Zum Beweis betrachten wir Fig.42. Die Dreiecke und deren Bezeichnungen sind mit jenen der Fig. 34 identisch. Aus (9.4) schliesst man dann

$$\frac{8}{3}[v(Q'_2) - v(Q'_4)] = \frac{8}{3}[v(Q'_1) - v(Q_2)] + \frac{8}{3}[v(Q_2) - v(Q_3)]$$

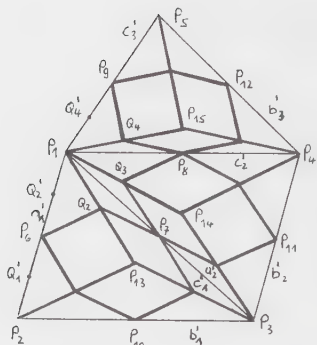


Fig. 42

$$\begin{aligned}
 & + \frac{8}{3} [v(Q_3 - v(Q_4))] + \frac{8}{3} [v(Q_4 - v(Q'_4))] = \\
 & - \left| \frac{Q_2 - Q'_2}{P_6 - P_1} \right| \left[\frac{8}{3} (u_6 - u_1) - \frac{2}{3} (u_2 - u_1) \right] + \frac{2}{3} (v_6 - v_{13}) \\
 & - \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_7 - P_1} \right| \left[\frac{8}{3} (u_7 - u_1) - \frac{2}{3} (u_3 - u_1) \right] + \frac{2}{3} (v_{13} - v_{14}) \\
 & - \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_8 - P_1} \right| \left[\frac{8}{3} (u_8 - u_1) - \frac{2}{3} (u_4 - u_1) \right] + \frac{2}{3} (v_{14} - v_{15}) \\
 & - \left| \frac{Q'_4 - Q_4}{P_9 - P_1} \right| \left[\frac{8}{3} (u_9 - u_1) - \frac{2}{3} (u_5 - u_1) \right] + \frac{2}{3} (v_{15} - v_9) \\
 & = + \left(\left| \frac{Q_2 - Q'_2}{P_6 - P_1} \right| + \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_7 - P_1} \right| + \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_8 - P_1} \right| + \left| \frac{Q'_4 - Q_4}{P_9 - P_1} \right| \right) u_1 \\
 & - \frac{8}{3} \left(\left| \frac{Q_2 - Q'_2}{P_6 - P_1} \right| u_6 + \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_7 - P_1} \right| u_7 + \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_8 - P_1} \right| u_8 + \left| \frac{Q'_4 - Q_4}{P_9 - P_1} \right| u_9 \right) \\
 & + \frac{2}{3} \left(\left| \frac{Q_2 - Q'_2}{P_6 - P_1} \right| u_2 + \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_7 - P_1} \right| u_3 + \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_8 - P_1} \right| u_4 + \left| \frac{Q'_4 - Q_4}{P_9 - P_1} \right| u_5 \right) \\
 & + \frac{2}{3} (v_6 - v_9). \tag{9.12}
 \end{aligned}$$

Ersetzen wir hier die Brüche nach Lemma 3.2:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{Q_2 - Q'_2}{P_6 - P_1} \right| &= \left| \frac{P_{13} - P_6}{P_2 - P_1} \right| = \frac{b_1'^2 + c_1'^2 - a_1'^2}{4J_1}, \\
 \left| \frac{Q_3 - Q_2}{P_7 - P_1} \right| &= \left| \frac{P_{13} - P_{14}}{P_3 - P_1} \right| = \frac{b_1'^2 + a_1'^2 - c_1'^2}{4J_1} + \frac{b_2'^2 + c_2'^2 - a_2'^2}{4J_2}, \\
 \left| \frac{Q_4 - Q_3}{P_8 - P_1} \right| &= \left| \frac{P_{14} - P_{15}}{P_4 - P_1} \right| = \frac{b_2'^2 + a_2'^2 - c_2'^2}{4J_2} + \frac{b_3'^2 + c_3'^2 - a_3'^2}{4J_3}, \\
 \left| \frac{Q'_4 - Q_4}{P_9 - P_1} \right| &= \left| \frac{P_{15} - P_9}{P_5 - P_1} \right| = \frac{b_3'^2 + a_3'^2 - c_3'^2}{4J_3},
 \end{aligned}$$

so wird (9.12) gleich der linken Seite von (8.8), wenn berücksichtigt wird, dass $v_6 = v_9 = \text{const.}$ Da $u(R_1)$ nach Voraussetzung auf $\bar{C}_{cd}$ (8.8) erfüllt, folgt

$$[v(Q'_2) - v(Q'_4)] = 0 .$$

Mit Hilfe von (9.3), Lemma 9.3 und (8.5) zeigt man, dass

$$[v(Q'_2) - v(Q'_1)] = 0 .$$

Somit ist der Satz bewiesen. ■

Betrachten wir nun das RWP I als näherungsweise gelöst. Die mit stückweise quadratischen Ansätzen erhaltene Funktion $\bar{u}$ mit den reellen Gitterwerten u_i erfülle im Innern von $R'_1 \cup R'_3$ (8.7) und (8.4) und auf dem Rand $\bar{C}_1$ (8.5) und (8.8). Um das RWP II zu lösen, ist die Kenntnis des Wertes η_1 notwendig.

Wir setzen zuerst

$$v_j = 0 \qquad \forall P_j \in R_1 \cap \bar{C}_{ab}$$

und wählen

$$v(Q'_{j_0}) = 0 , \qquad Q'_{j_0} \in R_2 \cap \bar{C}_{ab} .$$

Nach Satz 9.7 ist dann

$$v(Q'_j) = 0 \qquad \forall Q'_j \in R_2 \cap \bar{C}_{ab} ,$$

und es gilt

$$v(R \cap \bar{C}_{ab}) = 0 .$$

Es ist nun ein Näherungswert $\bar{\eta}_1 = \bar{m}(G)$ von $\eta_1 = m(G)$ so zu bestimmen, dass

$$v(R_1 \cap \bar{C}_{cd}) = v(R_2 \cap \bar{C}_{cd}) = \bar{\eta}_1 .$$

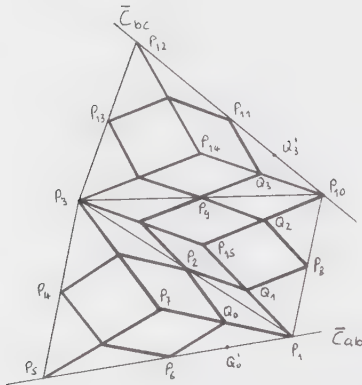


Fig. 43

Dieser Wert ist nicht so unmittelbar zu finden wie im linearen Fall. Anhand von Fig.43 soll gezeigt werden, wie man ihn aus $u(R_1)$ berechnen kann:

Mit (9.3) und (9.4) wird

$$\begin{aligned} v(Q'_3) - v(Q'_0) &= [v(Q'_3) - v(Q_3)] \\ &+ [v(Q_3) - v(Q_2)] + [v(Q_2) - v(Q_1)] \\ &+ [v(Q_1) - v(Q_0)] + [v(Q_0) - v(Q'_0)] \\ &= F(u_1) + \frac{1}{4}(v_{11} - v_6) , \end{aligned}$$

wobei $F(u_1)$ ein Ausdruck ist, der nur von Werten u_1 abhängig ist. Da wir $v_6 = v(Q'_0) = 0$ gesetzt haben, gilt

$$v(Q'_3) - \frac{1}{4}v_{11} = \frac{3}{4}\bar{n}_1 = F(u_1)$$

und

$$\bar{n}_1 = \frac{4}{3}F(u_1) . \quad (9.13)$$

Setzt man nun

$$v(R_1 \cap \bar{C}_{cd}) = \bar{n}_1 = \frac{4}{3}F(u_1) ,$$

so wird nach Satz 9.7 auch

$$v(R \cap \bar{C}_{cd}) = \bar{n}_1 = \frac{4}{3}F(u_1) .$$

Damit lässt sich das RWP II lösen.

9.5 Bemerkungen zur Konvergenz des konformen Moduls im quadratischen Fall .

Wir wollen nochmals die Frage der Konvergenz aufwerfen. Im Mittelpunkt steht dabei sicher die Konvergenz des konformen Moduls. Da wir diese Frage bei linearen Ansatzfunktionen sehr ausführlich behandelt haben und wir grundsätzlich gleich vorgehen können, genügt es, nur die wesentlichen Resultate anzugeben und kurz zu begründen. Ohne Beweis formulieren wir den zu Satz 6.10 völlig analogen

Satz 9.8: Sei $\bar{G}$ das polygonale Gebiet, welches sich durch die Triangulierung von G ergibt. Sei $\bar{u}$ jenes in den Dreiecken quadratische Polynom, für das

$$I_{\bar{G}}(\bar{u}) = \min_u \{ I_{\bar{G}}(u) / u \text{ in } \bar{G} \text{ stückweise quadratisch} \} .$$

Dann gilt für den nach (9.13) berechneten konformen Modul $\bar{m}(\bar{G}) = \bar{\eta}_1$

$$\bar{m}(\bar{G}) = 2I_{\bar{G}}(\bar{u}) = |\bar{u}|_{1,\bar{G}}^2 .$$

Wir wollen zuerst den Fall als gegeben annehmen, wo $\|u\|_3 < \infty$. Wir zeigen mit den Bezeichnungen von Kap. 6

Satz 9.9: Die Konvergenzordnung bei quadratischen Ansätzen ist gleich wie bei linearen Ansatzfunktionen, d.h.

$$|\bar{m}(G^{(n)}) - m(G)| = O(h^2) .$$

Beweis: Da wegen $G \subset G^{(n)}$

$$\bar{m}(G^{(n)}) > \bar{m}(G) > m(G) > 0 ,$$

wird

$$\bar{m}(G^{(n)}) - m(G) = [\bar{m}(G^{(n)}) - \bar{m}(G)] + [\bar{m}(G) - m(G)] .$$

Weil $\|u\|_3 < \infty$, schliesst man aus dem in Abschn. 6.5 Gesagten,

dass die Innenwinkel bei den Randpunkten P_a, P_b, P_c, P_d nicht grösser als $\pi/2$ sind. Das bedeutet, dass es kein konvexes Gebiet ausser dem Rechteck selbst gibt, auf dem $\|u\|_3 < \infty$. Da andererseits wegen unserer Voraussetzung kein anderer Innenwinkel grösser als π sein darf, kann G nicht polygonal sein und $\bar{m}(G^{(n)}) - \bar{m}(G)$ ist sicher positiv.

Wie im Beweis von Satz 6.11 schätzen wir diesen Term ab zu

$$\begin{aligned} \bar{m}(G^{(n)}) - \bar{m}(G) &= \|u^{(n)}\|_{1,G}^2 - \|u\|_{1,G}^2 = \sum_i \|u^{(n)}\|_{1,T_i \setminus \bar{T}_i}^2 \\ &\leq \sum_i \|u^{(n)}\|_{1,T_i \setminus \bar{T}_i}^2 \leq k_1 h \sum_i \|u^{(n)}\|_{1,\bar{T}_i}^2 \\ &\leq k_1 h \sum_i (\|u^{(n)} - u\|_{1,\bar{T}_i}^2 + \|u\|_{1,\bar{T}_i}^2). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Für $\sum_i \|u\|_{1,\bar{T}_i}^2$ im letzten Ausdruck ergibt sich eine Abschätzung wie im Beweis von Satz 6.11:

$$\sum_i \|u\|_{1,\bar{T}_i}^2 \leq \sum_i (\|u - u_I\|_{1,\bar{T}_i}^2 + \|u_I\|_{1,\bar{T}_i}^2).$$

Hier gilt mit (6.7)

$$\sum_i \|u_I\|_{1,\bar{T}_i}^2 \leq h \|u\|_2^2,$$

wie im linearen Fall, während die Terme $\sum_i \|u - u_I\|_{1,\bar{T}_i}^2$ und $\sum_i \|u^{(n)} - u\|_{1,\bar{T}_i}^2$ stärker konvergieren. Das in (9.14) gesetzt, ergibt

$$\bar{m}(G^{(n)}) - \bar{m}(G) = O(h^2).$$

Die Aussage des Satzes mag etwas unerwartet erscheinen, doch vergegenwärtigt man sich, dass die Konvergenzordnung aus geometrischen Ueberlegungen (Formel (6.7) und Lemma von Berger) stammen, so wird das Resultat plausibel.

Liegt andererseits eine Singularität vor, so dass $\|u\|_3 \neq \infty$, was sicher immer dann der Fall ist, wenn G polygonal ist, so gilt das in Abschn. 6.5 Gesagte. Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned}\bar{m}(G) - m(G) &= \|\bar{u}^{(n)}\|_1^2 - \|u\|_1^2 \\ &= \langle \bar{u}^{(n)} - u, \bar{u}^{(n)} - u \rangle_1 + 2 \langle \bar{u}^{(n)} - u, u \rangle_1 \\ &= \langle \bar{u}^{(n)} - u, \bar{u}^{(n)} - u \rangle_1 + 2 \left[\langle \bar{u}^{(n)} - u, -\Delta u \rangle + \oint_C (\bar{u}^{(n)} - u) \frac{\partial u}{\partial n} ds \right].\end{aligned}$$

Da $\Delta u = 0$ und $\frac{\partial u(s)}{\partial n} = 0$ auf $C_1 = C_{ab} \cup C_{cd}$ und $\bar{u}^{(n)} = u$ auf $C \setminus C_1$, schätzt man den Fehler des konformen Moduls ab zu

$$\bar{m}(G) - m(G) = \|\bar{u}^{(n)} - u\|_1^2 \leq \|\bar{u}^{(n)} - u\|_1^2.$$

Nach [22] wird $\|\bar{u}^{(n)} - u\|_1^2$ unabhängig vom Grad des als Ansatzfunktion gewählten Polynoms

$$\|\bar{u}^{(n)} - u\|_1^2 = O(h^{2(\sigma-1)}),$$

wobei σ die Bedeutung von Abschn. 6.5 besitzt.

Bezeichnen wir mit U_i sektorielle Umgebungen von Singularitätsstellen, so wird

$$\|\bar{u}^{(n)} - u\|_1^2 = \|\bar{u}^{(n)} - u\|_{1, \cup U_i}^2 + \|\bar{u}^{(n)} - u\|_{1, G \setminus \cup U_i}^2.$$

Da in $G \setminus \cup U_i$ die Norm $\|u\|_3$, $G \setminus \cup U_i < \infty$, wird der zweite

Term im Fall von quadratischen Ansatzfunktionen kleiner als bei linearen Polynomen, während der erste Term für die Konvergenzordnung verantwortlich ist. Wir dürfen daher erwarten, dass der Fehler $\bar{m}(G) - m(G)$ mit quadratischen Ansätzen kleiner ist als mit linearen, während die Konvergenzordnung gleich ist.

Beispiel: Wir bilden wie in Abschn. 6.5 das in Fig. 29 dargestellte Gebiet auf ein Rechteck B ab. Wir benützen

dieselben Triangulierungen wie dort. Die Ergebnisse mit der eingezeichneten Triangulierung und zwei Verfeinerungen sind in der nachfolgenden Tabelle festgehalten. Als Vergleich sind die Werte, die wir mit linearen Ansätzen bekommen haben, nochmals aufgeführt.

n	$h_\ell^{(n)}$	$h_q^{(n)}$	Anzahl Unbek.	$\bar{m}_\ell(G)$	$\bar{m}_q(G)$
1	1		1	1.108696	
2	1/2	1	11	1.058258	1.039424
3	1/4	1/2	47	1.029499	1.017907
4	1/8	1/4	191	1.014780	1.008984

Auch im quadratischen Fall wird die vorausgesagte Konvergenzordnung bestätigt.

9.6 Beispiele

1. In [8] wurde mit linearen Ansatzfunktionen in gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken mit Schenkellängen $h = 2^{-n}$ der konforme Modul $\bar{m}_\ell(V^{(n)})$, $n = 1, \dots, 5$, des Viereckes V , dargestellt in Fig. 44

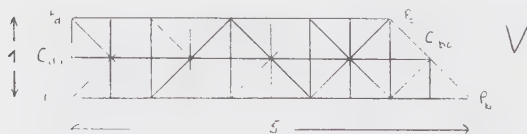


Fig. 44

berechnet. D. Gaier erhielt für die verschiedenen n die Werte

n	1	2	3	4	5
$\bar{m}_\ell(V^{(n)})$	0.23693	0.23503	0.23423	0.23390	0.23377

Mit der in Fig. 44 gegebenen Triangulierung in 36 Dreiecke der Schenkellänge $h = 2^{-1}$ wurde $\bar{m}_q(V^{(1)})$ mit quadratischen Polynomen berechnet. Dabei ist die Zahl der sich ergebenden Unbekannten mit 85 gleich wie bei der Verfeinerung der Triangulierung in $4 \cdot 36 = 144$ Dreiecke der Schenkellänge $h = 2^{-2}$ und linearen Ansatzfunktionen. Die Näherungen für den konformen Modul betragen

$$\bar{m}_q(V^{(1)}) = 0.23430 ,$$

$$\bar{m}_\ell(V^{(2)}) = 0.23503 .$$

Um mit linearen Ansätzen ein mit $\bar{m}_q(V^{(1)})$ vergleichbares Resultat zu bekommen, ist eine nochmalige Verfeinerung der Triangulierung in $4 \cdot 144 = 576$ Dreiecke der Schenkellänge $h = 2^{-3}$ nötig. Mit dieser Triangulierung bei 315 Unbekannten errechnete D. Gaier

$$\bar{m}_\ell(V^{(3)}) = 0.23423 ,$$

was ungefähr $\bar{m}_q(V^{(1)})$ entspricht.

2. Ein Viertelskreis soll derart auf ein Rechteck abgebildet werden, dass die Bildpunkte der drei Ecken und des Mittelpunktes des Kreisbogens den Ecken des Rechteckes entsprechen. Aus Symmetriegründen gilt hier $m(G) = 1$.

Die Einteilung des Viertelskreises in Dreiecke und das Bild davon ist in Fig. 45 gegeben. Für den in den Dreiecken quadratischen Ansatz erhält man bei 215 Unbekannten

$$\bar{m}_q(G) = 1.0081 .$$

Trianguliert man neu, indem man in jedem Dreieck die Seitenmittelpunkte verbindet, und verwendet man in jedem Dreieck

den linearen Ansatz, so erhält man für den konformen Modul

$$\bar{m}_\ell(G) = 1.0132 .$$

3. Das L-förmige Gebiet, dargestellt in Fig. 46, soll so auf ein Rechteck abgebildet werden, dass die Bilder der Punkte P_a, P_b, P_c und P_d den Ecken des Bildes entsprechen. Für den konformen Modul $m(G) = 1$ erhält man die Näherungen

$$\bar{m}_\ell(G) = 1.0661 \quad \text{und} \quad \bar{m}_q(G) = 1.0491 .$$

Der Grund für die relativ schlechte Näherung liegt in der Form des Gebietes. Die einspringende Ecke mit dem Innenwinkel $3\pi/2$ stellt eine Singularitätsstelle dar (vgl. Abschn. 6.5). Die Konvergenz ist, wenn solche Eckpunkte vorliegen, äusserst schlecht, nämlich

$$\bar{m}(G^{(n)}) - m(G) = O(h^{2/3}) .$$

Selbst bei einer Triangulierung in 420 Dreiecke mit 839 Unbekannten erhält man offenbar noch kein befriedigendes Resultat.

In der Fig. 46 b sind die Bilder derjenigen Punkte, welche in Fig. 46 a hervorgehoben wurden, eingezeichnet. Die Punkte auf jenen Geraden, welche im Urbild mit kleinen Pfeilen markiert sind, wurden untereinander verbunden. Diese Verbindung entspricht jedoch nicht exakt dem Bild einer markierten Geraden, sondern dient lediglich der Anschauung.

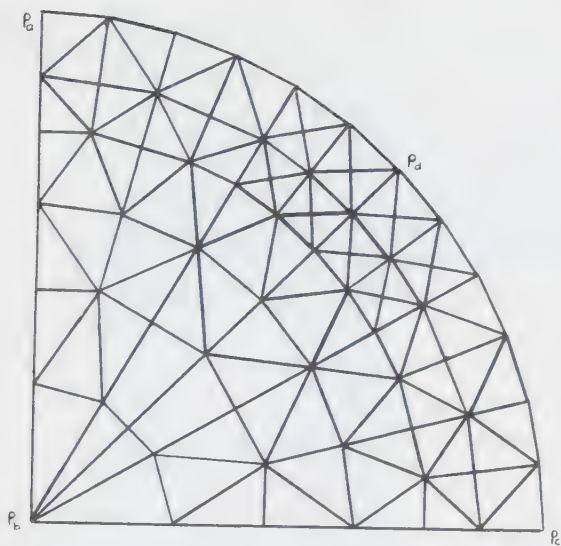
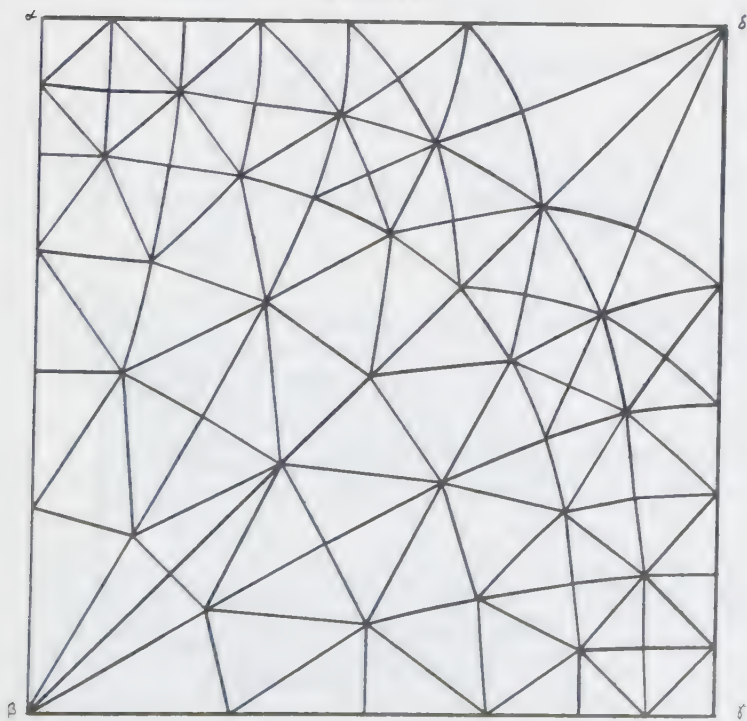


Fig. 45



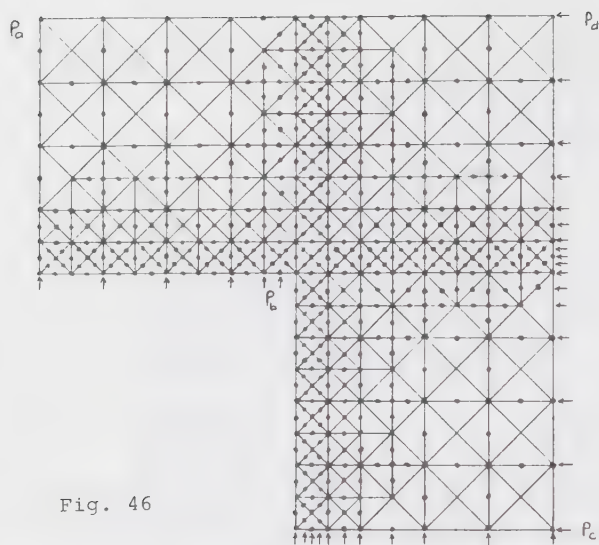
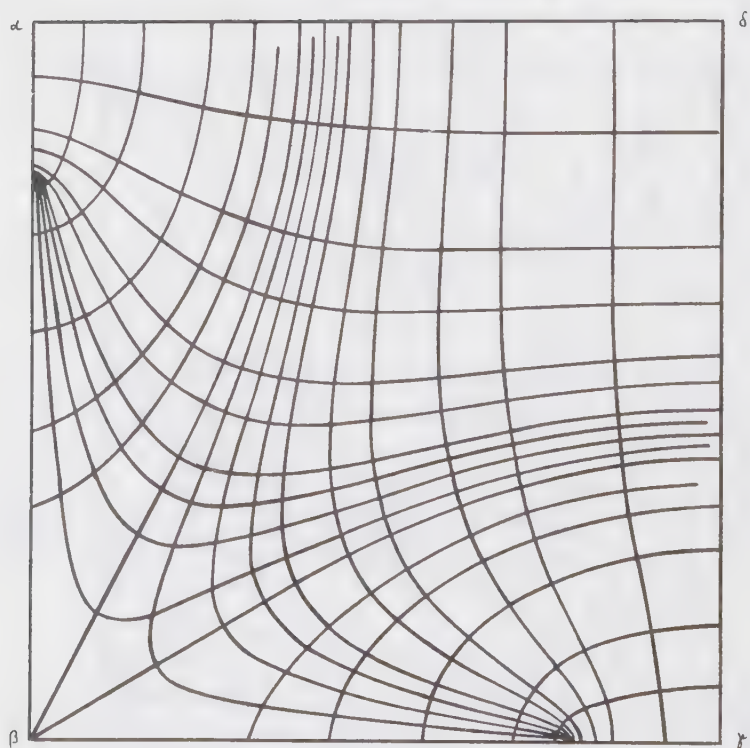


Fig. 46



LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [2] A.K. Aziz, ed., The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1972.
- [3] R.E. Barnhill und J.R. Whiteman, Finite Element Methods with Triangles, aus: Error Analysis of Finite Element Methods with Triangles for Elliptic Boundary Value Problems, Academic Press, London, 1973, 83-112.
- [4] I.S. Berezin und N.P. Zhidkov, Computing Methods, Vol.2, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [5] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer, Berlin, 1951.
- [6] J. Ferrand, Fonctions Préharmoniques et Fonctions Préholomorphes, Bull. Sci. Math., Deuxième Série 68(1944), 152-180.
- [7] G. Fichera, Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems, Lecture Notes in Mathematics 8, Springer, Berlin, 1965.
- [8] D. Gaier, Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden, Numer. Math. 19(1972), 179-194.
- [9] D. Gaier, Konstruktive Methoden der konformen Abbildung, Springer Tracts 3, Berlin, 1964.

- [10] L.W. Kantorowitsch und W.I Krylow, Näherungsmethoden der höheren Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
- [11] O.A. Ladyzhenskaya und N.N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York, 1968.
- [12] J. Lelong-Ferrand, Représentation Conforme et Transformations à Intégrale de Dirichlet Bornée, Gautiers-Villars, Paris, 1955.
- [13] S.G. Michlin, Variationsmethoden der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin, 1962.
- [14] A.R. Mitchell und R. Wait, The Finite Element Method in Partial Differential Equations, J. Wiley & Sons, London, 1977.
- [15] Z. Nehari, Conformal Mapping, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [16] G. Opfer, Eine Bemerkung zur Gewinnung diskret-harmonischer Funktionen mit funktionentheoretischen Mitteln, Lecture Notes in Mathematics 395(1974), 215-222.
- [17] G. Opfer, Die Bestimmung des Moduls zweifach zusammenhängender Gebiete mit Hilfe von Differenzenverfahren, Arch. Rat. Mech. Anal. 32(1969), 281-297.
- [18] H.R. Schwarz, Methode der Finiten Elemente, Teubner, Stuttgart, 1980.
- [19] R. Scott, Interpolated Boundary Conditions in the Finite Element Method, SIAM J. Numer. Anal. 12(1975), 404-427.

- [20] W.I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Vol. III/2
VEM Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.
- [21] E. Stiefel, Einführung in die numerische Mathematik,
Teubner, Stuttgart, 1976.
- [22] G. Strang und G. Fix, An Analysis of the Finite Element
Method, Prentice-Hall, New York, 1973.
- [23] G. Strang, Approximation in the Finite Element Method,
Numer. Math. 19(1972), 81-98.
- [24] E. Voellmy, Fünfstellige Logarithmen und Zahlentafeln,
Orell Füssli, Zürich, 1966.

LEBENS LAUF

Als Bürger von Pfäffikon/ZH und Hittnau/ZH wurde ich, Fridolin Walter Bosshard, am 21. April 1947 in Pfäffikon/ZH geboren.

Von 1954 bis 1963 besuchte ich in Pfäffikon/ZH die Primar- und Sekundarschule. 1963 trat ich in die Lehramtsabteilung der Kantonsschule Zürcher Oberland in Wetzikon ein, wo ich 1967 die Matura bestand. Anschliessend bildete ich mich am Oberseminar des Kantons Zürich zum Primarlehrer aus und erhielt 1969 das Primarlehrerpatent.

Im Herbst 1969 immatrikulierte ich mich an der Universität Zürich zum Studium der Mathematik mit den Nebenfächern Physik und Chemie. 1975 bestand ich die Diplomprüfung. 1976 immatrikulierte ich mich erneut, um unter der Leitung von Prof. Dr. H.R. Schwarz eine Dissertation in Angriff zu nehmen.

Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen, Uebungen und Seminarien bei folgenden Dozenten: H. Bachmann, J.J. Burckhardt, B. Eckmann, H. Gross, W.L. Hill, G. Karrer, H.H. Keller, A. Kriszten, H.R. Schwarz, A. Steiner, H.H. Storrer, K. Strebel, N. Wirth, A. Wyler, H. Baer, C.H. Eugster, V. Meyer, H.R. Oswald, D. Schwarz, H. Staub, O. Woodtli.

Von 1973 bis 1976 arbeitete ich als Teilzeitangestellter an der Planungsabteilung der Zentralbibliothek Zürich; seit 1976 bin ich als Assistent von Prof. Dr. P. Kall am Institut für Operations Research und mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaften der Universität Zürich Lehrbeauftragter für die Mathematikübungen der Oekonomiestudenten.

